Національний технічний університет України «КПІ»
Педагогічний музей України

Серія «Педагогічні републікації»
Випуск 1

МИХАЙЛО КРАВЧУК

ВИБРАНІ ПРАЦІ

ІСТОРІЯ І МЕТОДИКА МАТЕМАТИКИ

Київ — 2014

ББК 22.1г+74.262.21+91.9:2

Рекомендовано до друку
науково-методичною радою Педагогічного музею України
(протокол № 4 від 29.04.2014 р.)

Упорядники:

Вірченко Н. О., д-р ф.-м. наук, професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ».

Гайдей В. О., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ», провідний науковий співробітник Педагогічного музею України

Міхно О. П., канд. пед. наук, директор Педагогічного музею України

Михайло Кравчук. Вибрані праці. Історія і методика математики / Національний технічний університету України «КПІ», Педагогічний музей України; [упоряд.: Вірченко Н. О., Гайдей В. О., Міхно О. П.]. – К. : НТУУ «КПІ», ПМУ, 2014. – 252 с. – (Сер. «Педагогічні републікації» ; вип. 1).

Перший випуск серії «Педагогічні републікації» присвячено вибраним працям з історії і методики математики М. П. Кравчука, видатного українського математика світового рівня, педагога, академіка ВУАН, автора понад 180 праць (наукових математичних, з історії і методики математики, науково-популярних, підручників математики для вишів, програм з математики), упорядника української математичної термінології, активного організатора національної освіти тощо.

У виданні, окрім вибраних праць Михайла Кравчука, подано бібліографію його творів і статті, що аналізують спадщину вченого з історії та методики математики.

Видання адресовано вченим, аспірантам, докторантам, викладачам вищих навчальних закладів, студентам та всім, хто цікавиться науково-педагогічною спадщиною М. П. Кравчука.

Михайло Кравчук

(1892–1942)

ВІД УПОРЯДНИКІВ

Провідні завдання діяльності Педагогічного музею України — зберігати, вивчати й пропагувати кращі надбання вітчизняної педагогічної думки — набувають сьогодні особливої значущості, адже надзвичайно актуальним є утвердження в громадській думці та суспільній практиці пріоритетності сфери освіти як необхідної умови національного розвитку і національної безпеки. Безперечно, що справжнє відродження української нації, поступ української освіти неможливі без повноцінної духовної присутності тих, хто зробив істотний внесок у вітчизняну й вселюдську культуру, в національну педагогіку.

Вищезазначені завдання музею реалізуються комплексно у науково-дослідній, науково-фондовій та експозиційно-виставковій діяльності і спрямовані насамперед на популяризацію спадщини видатних педагогів. Зауважимо, що популяризація педагогічної науки в постіндустріальну добу є доволі непростою справою з огляду на бурхливий розвиток сучасних засобів комунікації, коли людина зазвичай може знайти потрібну інформацію, не виходячи з дому. Хоча, слід відзначити, не завжди знайдена інформація є вичерпною і спирається на достовірні джерела. Музей же володіє справді безцінним скарбом — рідкісними виданнями праць корифеїв української педагогіки. Саме на популяризацію цих унікальних видань спрямовано новий проект — серію видань «Педагогічні републікації».

Пропонована вашій увазі книга містить републікації вибраних праць видатного українського математика і педагога Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942). Видання має дві взаємозалежні мети:

— ознайомити сучасного читача з тими працями М. Кравчука, які становлять значний науковий інтерес, але через ті чи інші обставини не публікувалися або публікувалися давно й у виданнях, недоступних для сучасного читача;

— відобразити у складі збірки найбільш важливі, але наразі найменш досліджені напрями науково-педагогічної творчості М. Кравчука: методику викладання математики й історію математики.

У книзі також подано бібліографію праць ученого та статті, в яких проведено аналіз історичної та методичної спадщини Михайла Кравчука.

З метою надання зацікавленому читачеві якнайширшого доступу до серії «Педагогічні републікації» видання виходитиме у двох варіантах: друкованому та електронному, який розміщуватиметься на сайті Педагогічного музею України

http://pmu.in.ua/

ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ

ЛИСТИ ДО В. Й. ЛЕВИЦЬКОГО[1] (1925–1931)[*]

Київ, 16.10.1925

Високоповажаний Пане Голово!

У відповідь на Ваш ласкавий лист від 15. VI. ц. р. пересилаю свої дві фотографії, curriculum vitae[2] та спис праць.

Оскільки я зрозумів зміст листа, мене обрано на дійсного члена Товариства[3]. За цю високу честь дозвольте у Вашій особі скласти Науковому Товариству глибоку подяку.

Проф. Др. *Михайло Кравчук*

Щоб могти виконувати свої нові обов'язки, хотів би дуже мати інформації щодо статуту Товариства. Вкінці прошу ласкаво вибачити за так запізнілу відповідь, що сталася не з моєї вини, бо Ваш лист, через невлучність адреси, дістався до мене лише 15 цього місяця. Моя певна адреса є:

Київ. Політехн. Інститут, 29
М. Кравчук

Київ, 2.08.1926

Високоповажний Пане Редакторе!

При цім листі пересилаю до Редакції «Збірника» два рукописи: академіка Миколи Крилова «Спосіб нескінченних визначників...»[4] та мій «Про Green'ове та Stokes'ове перетворення»[5]. Щодо рукопису акад. Крилова, то, як зазначено в тексті, він є частина більшої роботи, що друкується тепер в «Annales de Toulouse», але розділ, до якого належить цей артикул, ще до Тулузи не відісланий, отже побачить світ не раніше, мабуть, як за місяців 6–8, а може й пізніше.

Від якогось часу справа видання наукових праць у Києві значно полегшилася, отож я з охотою взявся би, маючи добре знайомих людей

---

[*] 1. Кравчук М. Ф. Письма В. И. Левицкому (1926–1931): (Публ. и коммент. П. К. Хобзея) // Очерки истории естествознания и техники. — 1990. — Вып. 38. — С. 105–118.

2. Михайло Кравчук. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — НТУУ «КПІ», 2000. — 232 с.

у декількох редакціях наукових журналів, помагати галицьким товаришам-математикам, що хотіли б друкувати свої роботи тут, як інформаціями, так і переговорами з редакціями.

В недовзім часі маю переслати Вам декілька своїх відбиток.

З глибокою пошаною до Вас

Др. *Мих. Кравчук*.

Київ. Політехн. Інститут, 29
26.11.1926, Київ

Високоповажний Пане Професор!

Щира Вам дяка за відбитки, що про них сповіщаєте у Вашім ласкавім листі від 2/ц. м. Ще я їх не дістав, очевидно, через затримку на таможні.

Матиму за честь і за приємний обов'язок, на Вашу ласкаву пропозицію, і надалі співробітничати в «Збірнику». Що до членства в «*Circolo mat. di Palermo*»[6], то як раз перед двома тижнями мене туди мав рекомендувати проф. *Picone*[7] і я чекаю про це повідомлення. Дуже буду Вам вдячний, коли візьмете на себе рекомендувати мене до «*Deutsche Math. Vereinigung*»[8] і при нагоді сповістити про висоту вступного та членського внеску. В Києві тепер ніякого математичного товариства нема (була матем. секція при Укр. Наук. Т-ві та Фіз. Математичне Т-во при Університеті), але йде мова про Всеукраїнське Об'єднання Математиків з осередком у Харкові. Коли воно здійсниться, то матиму приємність разом із нашими математиками запросити Вас до нього.

На Вашу цікаву задачу про інтеграцію рівняння:

$$y + \frac{1 + y'^2}{y''} = -py' \tag{1}$$

можу, здається мені, дати повну відповідь. А саме, взявши за нову невідому функцію

$$\phi = \operatorname{arctg} y',$$

а за нове незалежне змінне — y, перетворимо (1) до наступної форми:

$$\frac{dy}{d\phi} + \operatorname{tg} y = -p \operatorname{tg}^2 \phi\,. \tag{2}$$

Інтеграл цього рівняння є

$$y = C_1 \cos\phi - p\cos\phi \int \frac{\sin^2\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi. \qquad (3)$$

Далі, з огляду на

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\phi$$

та на (3), маємо:

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}\phi} = \left[p\cos\phi \int \frac{\sin^2\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi - p\operatorname{tg}\phi - C_1\cos\phi \right] d\phi;$$

отже

$$x = \log\cos\phi - C_1\sin\phi + p\int\left(\cos\phi \int \frac{\sin^2\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi\right) d\phi + C_2 \qquad (4)$$

Взори (3) та (4) дають загальний інтеграл рівняння (1). Всі невиконані квадратури зводяться до елементарних функцій. Вилучення параметра ϕ з рівнянь (практично цього зробити, здається, не можна) привело б до дуже складної трансцендентної залежності між x та y.

Дуже буду радий, коли ці прості уваги Ви зможете використати в Ваших дослідах.

З глибокою пошаною до Вас

Михайло Кравчук

12.12.1926, Київ

Високоповажаний Пане Професор!

Вчора дістав я відбитки акад. Крилова та свої, XXV том «Записок»[9] та «Sitzungsbericht»[10]. Складаю Вам за них щиру подяку. Виглядають вони прегарно. Дуже вдячний я Вам також за рекомендацію до «Deutsche Math. Vereinigung». Сьогодні проф. Bieberbach[11] прислав мені повідомлення про це.

В Києві за останні кілька років нема «Bericht»'ів[12] товариства. Отож при нагоді чи не були б Ви ласкаві дати мені відомості про висоту вступного та членського внеску, а також — на яку адресу маю його вислати? Перекази грошей за кордон у нас можливі лише через Державний Банк.

Сьогодні вислав Вам відбитки деяких своїх робіт.

Прошу прийняти вислів моєї глибокої пошани.

Ваш *М. Кравчук*

12.01.1926[13]
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

Задержався з відповіддю на Ваші останні листи з двох причин; цілі святки нездужав та чекав відповіді від акад. М. Крилова, що тепер перебуває в Парижі; я сам не член Société Math.[14], але він, як що в скорім часі не виїде з Парижу, пропонує рекомендувати туди Вас і мене. Для цього йому потрібні **французькою мовою** короткі відомості за Вас: назва «Збірника», що Ви його редагуєте, назва шкіл, де Ви мали або маєте лекції, назви товариств, де Ви є членом. Чи не були б Ви ласкаві самі подати йому ці відомості на адресу:

M. A. Blanchard, Libraire,

et bis Place de la Sorbonne,

on prie de remettre á M. Prof. Nicolas Kryloff?

Що до відповідного внеску, то зразу не турбуйтеся його висилати, бо я ще не знаю скільки, та й щоб гроші не розминулися з адресатом. Тим часом гроші буде взято з мого рахунку у *Ganthier Villars'*а, і колись при нагоді у нього або у *Lenbner'*а Ви зможете їх скомпенсувати. При цій нагоді пересилаю Вам книгу Васильєва[15], що Вас цікавить; прошу прийняти її як маленький дарунок. Здоровлю Вас із святами, хоча й запізнено, і щиро бажаю здоров'я та спокою духа.

З глибокою пошаною до Вас

Михайло Кравчук

Київ, 5.03.1927
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

У Вашій листівці від 15. II. ц. р. Ви питаєте, чи проф. М. Крилов згодивбися бути членом Наукового Т-ва ім. Шевченка[16]. Сьогодні я дістав від нього листа, де він радо годиться і просить переказати Вам свою щиру подяку за почесну увагу до нього. Він ще в Парижі, але має тут бути в кінці квітня або на початку травня. Я цікавлюся тепер питанням про існування старших похідних у функцій дійсного змінного. Знаю, що в Comptes Rendus[17] (р.р. 1909–1918) є на цю тему замітки *Montel'*а[18], але не можу їх у Києві знайти.

В Circolo matematico di Palermo я — член з 1.1.1927; в Rendiconti[19], мабуть, буде надруковано мою замітку з обсягу алгебри.

Зі щирою пошаною до Вас

Мих. Кравчук

Київ, 20.03.1927
Політехн. Інститут, 29

До Ювілейного Комітету
математично-природописно-лікарської секції
Наукового Товариства ім. Шевченка[20]

У відповідь на запросини, що ними мене вшанував Комітет, пересилаю при цім листі працю п. з.[21] «Про існування похідних у функції дійсного змінного»[22] для тому «Збірник прир.-мат.-лік. секції», присвяченого вп. п. Дрові[23] Володимирові Левицькому.

В разі, коли її буде прийнято до друку, залишаю Редакції вільну руку щодо орфографічних, мовних та термінологічних змін, бо тутешня математична мова є дещо відмінна від мови «Збірника». Крім того, дуже просив би прислати мені на подану вгорі адресу одну коректу.

Прошу прийняти вислів моєї глибокої шани

Др. *Мих. Кравчук*

Київ, 10.09.1927
Політехн. Інститут, 29

Як дозволите, то Вашу працю «Трактриса як евольвента ланцьової лінії»[24] я подам до редакції «Записок Київського Інституту Народної Освіти (кол. Університету)», де я беру участь, як член редакційної колегії. Велика Вам дяка за пам’ять; маю надію, що ця Ваша розвідка — не остання з тих, що побачать світ у Києві.

При цій нагоді пересилаю Вам, а також до Бібліотеки Наукового Товариства де-які свої відбитки. Щодо Вашої розвідки, то Вам буде переслано одну коректу, а до видрукованої книги — 50 відбиток.

З глибокою пошаною до Вас

Др. *Михайло Кравчук*

P. S. Читаючи Вашу розвідку, помітив я, що Ваші обчислення можна трохи вкоротити з допомогою очевидної рівності

$$\frac{d\xi}{d\eta}\cdot\frac{dx}{dy}=-1,$$

де ξ,η є координати якоїсь точки еволюти, а x,y — координати відповідної точки евольвенти. Тоді бо, взявши замісць

$$\eta=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{\xi}{c}}+e^{-\frac{\xi}{c}}\right)$$

рівняння

$$\frac{1}{c^2}\eta^2=1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$$

і поклавши

$$\eta=y+\frac{y'^2}{y''},\ \frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{1}{y'}$$

дістанемо:

$$\frac{1}{c^2}\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2=1+\frac{1}{y'^2},$$

що зводиться на

$$\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}-c\right)dy'+\sqrt{1+y'^2}dy=0,$$

звідки

$$y\sqrt{1+y'^2}-cy'=2\alpha\ (\alpha=\text{const});$$

тоді

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{1}{y'}\alpha\left(\frac{2\alpha+cy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

Заінтегрувавши останню рівність, дістанемо остаточно:

$$y=\frac{2\alpha+cp}{\sqrt{1+p^2}},x=\beta+\frac{c-\alpha p}{\sqrt{1+p^2}}-c\log\frac{1+\sqrt{c+p}}{p}, \tag{1}$$

де α та β є дві неозначені сталі, а p — параметр. Ваш вислід 8) дістанемо з (1), поклавши $\alpha=0$.

24.09.1927
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

Посилаючи свою маленьку увагу до Вашої розвідки Вам на суд, я не мав на оці, що вона може попасти до друку. Якщо Ви волите зробити мені таку честь, то я просив би Вас самого подати текст цього додатку для вміщення при кінці Вашої розвідки або (мабуть, краще) в примітці.

Маю надію, що здоров'я Ваше поправиться; гадаю, що недуга Ваша є нервового походження, як і у мене. Якась розривка, скажімо подорож до Київа, була б, гадаю, для Вас дуже корисна, а ми були б раді привітати у себе основоположника математичної культури нашого народу.

З глибокою пошаною до Вас

Михайло Кравчук

Київ, 18.10.1927
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Доктор!

Дякую Вам за преінтересну розвідку про формулу Стірлінга. Не відповів Вам зразу, бо завдала вона мені приємного клопоту: примусила подумати самому над цими речами. Щиро признаюся: я не зрозумів Ваших граничних переходів у другій половині розвідки — таких напр. як

$$\lim(m+1)(m+2)...2m = n^m .$$

Може я помиляюся, але мені здається, що ці міркування не зовсім певні. Тим часом Ваша основна думка мене так заінтересувала, що я взявся наново розробити другу половину Вашої розвідки. Пересилаю Вам текст із цими відмінами на Ваш суд. Коли Ваша згода, то в цій формі я його передам до редакції «Записок Київського Сільсько-Господарського Інституту», де беру участь як один із редакторів.

З глибокою пошаною до Вас

Мих. Кравчук

Київ 30.10.1927
Політехн. Інститут, 29

Високоповажний Пане Доктор!

Щиро Вам дякую за брошуру[25] з преінтересною промовою Вашої та наших вельмишановних товаришів М. Зарицького та І. Свєнціцького на ювілейнім святі. Ви (і в цій справі перший) підносите важливе та цікаве питання: *про вивчення історії математичної думки на Україні.* Хотілося б, щоб Ви зробили й початок, бо маєте легку руку. Я тут у Київі маю надію зацікавити цею справою мого шановного товариша Ф. Калиновича[26], що стільки попрацював над математичною термінологією.

Вашу ласкаву пропозицію — вмістити моє ім'я поруч Вашого над заміткою про формулу Стірлінга[27] вважаю для себе за велику честь і приймаю з глибокою подякою. Буду радий, коли доведеться ще десь бути Вашим співробітником.

Щиро Вам відданий *Мих. Кравчук*

Київ, 4.12.1927
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Доктор!

Велика дяка Вам за «Збірник» та за відбитки від товаришів і від мене. Книга гарна і змістом і виглядом. Дуже мені приємно, що я маю тепер і Вашого портрета[28].

Справа з друком тих «Записок», де має бути вміщено Ваші розвідки, трохи задержалася; нам ще не вдається зробити з них періодичні видання.

Пересилаю Вам замітку, що взагальнює значно мою розвідку в останньому томі Вашого «Збірника», бо дає конечні і достатні умови існування старших похідних. Якщо вважатимете за можливе, то я просив би вмістити її в Ваших *Sitzungsberich*'ах[29] і зробити мені 50 відбитків моїм коштом. Належну суму я авансом зможу переказати на адресу Товариства в кінці цього місяця.

Академік М. Крилов дістав від професора Серпінського запрошення взяти участь у організації з'їзду словянських математиків року 1929 у Варшаві. Цікаво було б знати, які погляди на цю справу Ваші і Львівського Наукового Товариства.

Прийміть мій щирий привіт

М. Кравчук

Київ, 15.01.1928
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

Прийміть мій щирий привіт, хоч і запізнений, з Новим Роком і подяку за пам'ять. Вашу книжечку[30] одержав безборонно, прочитав із великою цікавістю і гадаю, що Ви розвинете ширше ці делікатні думки.

Дуже радий, що Société Mathematique[31] таки згадало, що треба Вам вислати квитка. Французи взагалі не визначаються акуратністю; ось приклад: ще 20. X в Парижі один із банків одержав на моє ім’я невелику суму, і лише цими днями повідомив мене, хоч я до нього заходив майже щодня від 15 до 30 жовтня.

На всякий випадок пересилаю Вам замітку «Уваги до способу *Laguerre*’а[32], може ще знайдеться для неї місце в «Збірнику».

Моя праця наукова йде тепер дуже мляво; від недавнього часу я маю нові обов’язки: секретарюю при Президії Академії. Академія крім ювілею готується до оголошення конкурсу на велику кількість посад — головно наукових співробітників; будуть посади і при **математичних кафедрах**.

Що до тих кількох франків, то колись при нагоді може будете ласкаві передати їх як оплату тих додаткових відбиток, що з Вашого дозволу, мені виготовляють.

Прошу прийняти мої найкращі побажання

Ваш *Мих. Кравчук*

Київ, 29.01.1928
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

Щиро дякую за ласкаве запрошення до участі в Пулюєвім томі Вашого «Збірника»[33]. Як тільки вийду з дому (тепер трохи нездужаю), то перекажу Вашу ласкаву пропозицію й товаришам. Деякі адреси подаю, на випадок, коли б здалося Вам до речі зв’язатися з адресатами безпосередньо: Акад. Граве Дмитро Олександрович, Обсерваторний пер., 9. Акад. Крилов Микола Митрофанович, Бульвар Тараса Шевченка, 19. Проф. Чорний Сергій Данилович, Астроном. Обсерваторія, Обсерваторн. пер. Проф. фізики Гольдман Олександр Генрикович, Політехн. Інститут, Проф., Голова Укрмету (Укр. Метеор. служба) Данилевський Микола Іванович (Київ, Укрмет).

Сам надіюся прислати якусь розвідку не пізніше як за $1\frac{1}{2}$ місяці, разом з відбитками Вашої «Формули Стірлінга»[34] , що вже чекає друку на чисто. Друга Ваша розвідка[35] незабаром має піти до друку — сталася затримка через брак коштів.

Сердечний привіт Вам *М. Кравчук*

P. S. Чи дістаєте Ви *«Bulletin de la Société Mathematique de France»*? Мені досі не прислано за 1927 через якесь непорозуміння з адресою. Коли й Ви не одержали ще за минулий рік, то конче треба туди написати.

30.03.1928.
Київ, Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

Рівночасно з цею листівкою пересилаю Вам відбитки Вашої замітки про формулу Стірлінга[36], авторський примірник книги «Записок КСГІ», де її було вміщено, та мою розвідку «Про збіжність деяких ступанкових дробів»[37], що її бажав би, з Вашого дозволу, вмістити у «Збірнику» Вашої секції, присвяченім памяті д'ра Пулюя.

Що до другої Вашої розвідки[38], то вона побачить світ у «Записках Київського інституту народної освіти». Вона вже давно ухвалена до друку, а цими днями черговий том цих «Записок» почнуть складати. До літа в кожнім разі матимемо готові відбитки.

З жалем довідався з Вашої останньої листівки, що Ви були занедужали. Від щирого серця бажаю Вам як найшвидше відновити здоров'я та сили.

Я останнім часом теж трохи занепав по здоров'ю — потребую відпочинку, але чекати його ще довго. Маю надію побувати на математичнім з'їзді в Болоньї[39] в кінці цього літа, а як це вдасться, то хотів би подорож спланувати так, щоб заїхати хоч на днів кілька до Львова (та й на свою батьківщину — до Луцьку)[40].

Маю до Вас оце прохання: у мене є маленька замітка[41] (на 2–3 сторінки друку), але ще не виготовлена остаточно; як що з'ясується, що в «Збірнику» можна буде знайти для неї місце, то я просив би дозволу вислати її пізніше — за яких місяців півтора.

Прийміть мій щирий привіт

Др. *Мих. Кравчук*

Київ, 23.05.1928
Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Доктор,

Одночасно з цим листом відсилаю на адресу Вашої Секції рецензію на праці т. В. Тракала та самі праці. Оцінку я даю їм не високу, але не хотілося б знеохотити тим молодого автора до дальшої праці. По значних скороченнях та поправках усе-таки, мабуть, можна було б дещо з них використати для «Збірника»[42].

Серед харківських математиків виникла думка — скликати Всеукраїнський Математичний З'їзд; як довідаюся за подробиці, то поінформую Вас докладніше.

Мою «Замітку про контурні інтеграли»[42], що до цього додаю, мені дуже хотілося б умістити в «Збірнику», бо вона доповнює мою статтю в 25 томі «Збірника» в примітці до неї поправку.

Зі щирою пошаною до Вас

Ваш *Мих. Кравчук*

16.06.1928
Київ. Політехн. Інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор,

Цими днями дістав я відбитки двох моїх розвідок (...). Щира Вам дяка за них, а особливо за збільшену кількість проти звичайної. Академік Крилов, як і я, бажав би мати більшу кількість відбиток. Додаткові витрати на них, як і на мої відбитки, я беру на себе і при першій нагоді перекажу на цю мету ще деяку суму грошей (...)

Тепер в Інституті Наукової Мови[45] розглядаємо Ваші поправки та додатки до астрономічної термінології[46]. На мою думку, більшість цих нових матеріалів дуже цінна.

Прийміть мій щирий привіт

аш *М. Кравчук*

Київ, 13.12.1928

Високоповажаний Пане Професор!

Аж тепер надіюся Вас побачити: на святкуванні ювілею Академії в червні наступного року в Київі[47]. Надіємося мати гостей зі Львова, чоловік зо 30.

Сподіваюся від Вас якоїсь розвідки до наших журналів. Мабуть, і сам щось виготовлю для «Збірника». Вашої книжечки[48] чекаю з інтересом — невже її не перепустять?

Щиро бажаю Вам всього доброго

Ваш *М. Кравчук*

11.03.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Дякувати Вам за приязний лист та за відбитки. Відбитки проф. Куренському[49] та Sitzungsberichte декільком тутешнім ученим, що були при моїх відбитках, передано адресатам [...].

Щодо Вашої ласкавої пропозиції надрукувати мій звіт, то я не певен, чи він має широкий інтерес. В кожнім разі він не оброблений із літературного погляду, і деякі шершаві та слизькі місця довелося б змінити. Якщо Ви гадаєте, що його друкувати варто, то я прошу дозволу або поробити там купюри в коректі в шпальтах або замінити той текст, що є у Вас, виправленою копією, яку можу вислати негайно по одержанні Вашої відповіді.

Був би дуже радий щось одержати від Вас для «Записок С.-Г. І.», що невдовзі починаємо друкувати (з запізненням). Я в них друкуватиму статтю про взагальнення *Hermite'*ових многочленів (та *Laguerre'*ових). Останніми часами мені доводиться частенько поминати Laguerre'a[51]: і в тій розвідці, що я послав до Вас, і в останній замітці Comptes Rendus[52], і в цій статті. По моєму, це недооцінений математик.

Київ, 3.03.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Посилаю Вам відбитку відомостей за Вас у «Матеріалах до обрання нових академіків». Поки Ви її одержите, то «Матеріали» вже будуть видруковані. Якщо не до ладу, то пробачте, бо робилося дуже наспіх.

За з'їзд математиків у Варшаві напишу другим разом. Ак. М. Крилов мав запрошення ще вторік узяти участь в Організаційному Комітеті цього з'їзду, але наші офіційні кола цього не ухвалили.

Прийміть мій щирий привіт

Ваш *М. Кравчук*

Київ, 24.03.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Пересилаю Вам текст Звідомлення[53] (може краще зробити в заголовку «Звіт»?), виготовлений до друку. Якщо він буде надрукований, то хотів би мати авторські примірники, так само як і відбитки статті «Уваги до *Laguerre'*ового способу наближеного розв'язання рівнянь»[54].

Цими днями я бачився з хіміком, професором Семенцовим[55], що місяців кілька тому переслав Вам один рукопис. Він цікавиться його долею.

Що до Ваших праць, то я завжди буду радий їх у нас надрукувати; цими днями ми одержали повідомлення, що можна готувати черговий том «Записок ІНО» — він вийде десь у літі.

Дістав я нещодавно пропозицію від журналу «Україна» подати бібліографічний огляд математичної вкраїнської літератури за 1928 рік Мені було б дуже приємно зробити його спільно з Вами, якщо у Вас є на це час і змога.

Говорять у нас знов за організацію Всеукраїнського Математичного товариства. В найближчім часі Київські математики мають обговорити основи статуту та визначити членів до Організаційного Комітету. Президія Товариства, мабуть, перебуватиме в Харкові. Цікаво було б мати Ваші думки в цій справі. В якій мірі можна було б притягти до цього об'єднання математиків Західної Вкраїни? Чи не можна було б організувати у вас філію цього Товариства?

Я працюю тепер над трьома темами: застосування ортогональних многочленів у теорії ймовірностей, розвиненням моїх думок що до наближеної інтеграції диференціальних рівнянь — на рівняння інтегральні та рівняння з частинними похідними, та над наближеним розв'язанням рівнянь. На жаль, через брак часу (як і у Вас) робота йде дуже мляво, а працю, розпочату в розвідці про «Алгебраїчні студії над аналітичними функціями» цеї причини я зовсім занедбав [...].

Прийміть мій щирий привіт

Ваш *Мих. Кравчук*

14.04.1928

Високоповажаний Пане Професор!

Організація Київського Математичного т-ва посувається швидко; перспективи Всеукраїнського — ще не ясні. Надіюся, що за тиждень матимемо статут-вишлемо Вам його для ознайомлення. Як дозволите, то запропоную Вас на почесного члена Т-ва.

На засіданні Ради ВУАН я мав дуже приємну зустріч з академіком К. Студинським[56]. Щира Вам дяка за память.

Мене трохи непокоїть доля мого рукопису «Уваги до *Laguerre'*ового способу наближеного розв'язання рівнянь»[57], що вже кілька місяців тому висланий на Вашу адресу для «Збірника». Якщо він загубився на пошті, то я хотів би вислати копію.

Прийміть мій щирий привіт,

Ваш *Мих. Кравчук*

Київ, 28.04.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Бібліографічний нарис, що я за нього Вам писав, на жаль, не буде надрукований, бо в «Україні» не вистачило місця на огляди математичної та природничої літератури.

Але маю надію, що наше Математичне Товариство займеться бібліографією, і що Ви не зречетеся взяти участь у цій справі.

3-го травня на зборах Тимчасової Ради Матем. Т-ва я, за Вашою ласкавою згодою, запропоную Вас на почесного члена Товариства. Із киян почесних членів у нас буде четверо: академіки Граве, Крилов, Пфейфер та професор Букреїв. Чи не назвали б Ви ще когось із поважніших та старших галичан, як кандидатів на почесних членів?

Дуже радо привітали б ми у себе як Дійсних членів Ваших товаришів Чайковського, Зарицького та інших математиків, що працюють у вашім «Збірнику». Для цього було б досить їхніх листів (на адресу: Київ, вул. Короленка, 54, ВУАН, М. Кравчукові) з побажанням вписатися до Товариства, з зазначенням імен та прізвищ, національності, року народження, фаху, освіти, з переліком наукових праць та адресою.

Коректу мого «Звідомлення» я відіслав уже давно на адресу Друкарні Наукового Т-ва; дуже вдячний буду за авторські примірники. Також хотів би по змозі раніше дістати відбитки мого артикулу «Уваги до *Laguerre*'ового способу...», бо складаю тепер свою бібліографію.

Цими днями я познайомився з Др-ом Іваном Крип'якевичем[58] зі Львова. Він тут має загальні симпатії. Мабуть, він по повороті дещо розповість Вам за підготовку до виборів нових академіків, що так цікавлять усе наше суспільство та, надіюся є справою близькою й для Наукового Товариства ім. Шевченка.

Зі щирою пошаною до Вас

Ваш *М. Кравчук*

9.05.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Київський політехнічний інститут, бажаючи поглибити українізацію навчальної та наукової роботи, має на оці в ближчім часі запросити чимало професорів — фахівців із різних технічних наук, що можуть викладати українською мовою. Дуже велику послугу зробили б Ви нам, коли б могли попросити когось із наших молодих товаришів-львовян дати сюди як найбільше відомостей за таких фахівців-галичан, що мали би охоту перебратися сюди на роботу.

Деякі попередні відомості Політехнічний Інститут матиме цими днями, але вони не задовольнять, і всяка інформація, а також заяви зацікавлених осіб будуть дуже бажані.

Пересилаю при цій нагоді замітку *«Sur la résolution approchée et différentielles des équations linéaires integrales et différentielles»* для Ваших *Sitzungsbericht*'ів. Вона є продовженням моїх праць з попереднього року. Тепер я не без успіху застосовую оту саму основну думку до лінійних рівнянь із частинними похідними, про що невдовзі надрукую попереднє повідомлення.

Якщо моє «Звідомлення» вже готове, то чи не будете ласкаві загадати вислати мені авторські примірники.

Недавно дістав листа та рукопис математичної праці від М. Чайковського; маю надію надрукувати у виданнях Київського Математичного Товариства, але це вдасться мабуть, не так швидко.

Тут у нас готуються до виборів нових академіків, і названо вже чимало кандидатів. Щодо кандидатур із Західної України, то їх ще мало виявлено. Загальні збори Математичного Товариства, де затверджуватимуть перший склад членів Т-ва, відбудуться 14-го ц. м.

Прийміть вислів моєї щирої пошани

Ваш *М. Кравчук*

20.05.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Щира дяка Вам за «Звідомлення», воно справді виглядає дуже гарно. [...].

3.05. Вас одноголосно обрано на почесного члена в Раді нашого Математичного Т-ва, а 14.05 затверджено на загальних зборах. На членів Т-ва зголосилися т-ші М. Чайковський та М. Зарицький. На найближчих загальних зборах їх буде проведено.

Я такий заклопотаний тепер, що допустився прикрого недогляду: послав Вам замітку, що її надруковано Comptes rendus, а призначена до Sitzungsbericht'ів із подібним заголовком — лишилася у мене в теці. Як ще не пізно, то прошу ласкаво затримати цю замітку, а я вишлю ту, що треба (заголовок можна лишити той самий). Пробачте мені цю турбацію та прийміть мій щирий привіт

М. Кравчук

28.05.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Тут висунено Вашу кандидатуру до Академії. Через те, що до останнього моменту не надійшло за Вас ніяких матеріалів, я дозволив собі скласти коротку рекомендацію, додавши до неї (з доповненнями) ті матеріали, що їх було видано в «Збірнику» з нагоди Вашого ювілею. Пробачте, що зробив це без Вашої згоди, але справа з друкуванням виринула несподівано, і не було часу запитати. За тиждень матеріали вийдуть із друку, і я Вам вишлю Ваші. Виборча процедура почнеться 7.06.

Лист від ВШТ[60] Мирона Зарицького одержав, і його незабаром буде обрано на члена нашого Т-ва. «Словника» Ф. Калиновича[61] йому добудемо.

Перепрошую за неохайне писання — дається взнаки крайня втома.

Зі щирою пошаною до Вас

Ваш *М. Кравчук*

19.06.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Пробачте за цю запізнілу й коротку відповідь. Причина — крайня зайнятість та знесиленість.

Ваш лист та фотографію я передав до секретаріату Товариства і про нього повідомлено на засіданні Ради Т-ва (лист мені повернено).

Хотів би дуже мати й собі таку Вашу фотографію. Виборна процедура тут закінчиться 29-го ц. м.; тоді ще який тиждень муситиму закінчувати справи, а тоді на два місяці, мабуть, звільнюся [...].

Боюся, що на з'їзд математиків у Варшаві не поїде ніхто з наших математиків, хоч принципових заперечень тут не чуємо в математичних колах. Якими мовами там доповідатимуть?

Якщо вдасться справу з'ясувати глибше в колах НКО[62], то повідомлю Вас негайно.

Зі щирою пошаною

Ваш *М. Кравчук*

Київ, 8.07.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Щиро дякую за слова привіту та за сердечні побажання[63]. Справді маю надію через це нове становище трохи полегшити умови своєї наукової праці.

За фотографію щира дяка — її мені повернено. Завтра їду, як і Ви, на відпочинок до 10 вересня.

З глибокою пошаною до Вас

Ваш *М. Кравчук*

P. S. Щодо обов'язків неодмінного секретаря — нехай мене ця доля минає; тим часом — навпаки, маю невдовзі звільнитися від моїх дотеперішніх секретарських обов'язків.

Київ, 16.11.1929
Політехнічний інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

Давно вже не писав Вам і від Вас не діставав звістки. Хотів би одержати від Вас у зв'язку з можливими перспективами в Академії (обрання членів-кореспондентів то що) як найповніші відомості (чи відповідні бібліографічні вказівки) за Ваші праці, а по змозі і самі праці.

У нас 25 ц. м. буде сесія ВУАН і на повістці стоїть питання про порядок обрання членів-кореспондентів [...].

Наш вл. т. Микола Чайковський уже писав мені з Одеси[64], а цими днями прислано мені з Харкова на рецензію його великий рукопис. При цій нагоді пересилаю кілька своїх відбиток.

Прийміть мій щирий привіт

М. Кравчук

Київ, 26.11.1929
Політехн. інститут, 29

Високоповажаний Пане Професор!

У червні 1930 року має відбутися з'їзд математиків СРСР у Харкові. Організаційний Комітет, куди запрошено й мене, постановив запросити математиків із Західної України. Для всіляких погоджень потрібно наперед мати списки людей, що їх маємо запросити. Може б Ви були ласкаві просити когось із наших молодих товаришів-львовян, під Вашим керівництвом проект такого списку зробити і мені вислати. На цьому з'їзді проектується заснувати Асоціацію Математиків СРСР. Гадаю, що й Всеукраїнське математичне об'єднання зреалізується тоді ж або трохи раніше. З цих причин було б дуже бажано мати можливо численне представництво із Західної України [...].

У нас саме відбувається сесія Академії та зв'язані з нею всякі вибори. Мабуть, і мені доведеться стати на якусь роботу в Президії II-го відділу, хоч собі того не бажав через лихий стан здоров'я.

Прийміть мій щирий привіт

Мих. Кравчук

Київ, 27.12.1929

Високоповажаний Пане Професор!

Дякую Вам красно за відбитки з «Sitzungsbericht'ів» та за надрукування поправки до «Звідомлення».

Нещодавно мені довелося переконатися, що Народний Комісаріат Освіти мав би велике бажання притягти Вас до роботи у нас на умовах, які б у великій мірі залежали від Вас. Якби з Вашого погляду Ваш переїзд до Києва або до Харкова був можливий, то я б дуже просив подати прелімінарно Ваші умови.

ВУАН виробляє новий статут, що має встановити деякі нові катедри та звання почесних академіків.

Я написав цими днями листа ВП Миронові Зарицькому.

У списку осіб, що їх має бути закликано на з'їзд математиків у Харкові, стоять імена Ваше та М. Зарицького. Бажано було б мати більше гостей із Західної України. Прошу прийняти вислів моєї глибокої пошани

Мих. Кравчук

10.04.1931
Київ, Політехн. інститут, 29

Високоповажаний Пане Доктор,

Моя хвороба, крім багатьох інших лих, принесла мені ще одне: неакуратність. Пробачте як хворій людині надто запізнену відповідь. Сьогодня, по багатьох тижнях, почуваю себе краще, і пишу одночасно Вам та проф. Чайковському до Одеси.

Та Ваша праця, за яку Ви згадуєте у Вашій листівці, була в мене днів кілька й я за неї прелімінарно доповідав на засіданні математичного циклу. Пізніше проф. Куренський її взяв, щоб погодити з Вами деякі дрібні поправки тексту. Академік Граве, з нагоди цього повідомлення, подав цікаву згадку, що він сам року 1898 в Nouvelles Annales виступав з заміткою на цю саму тему про surpuissances, де довів деякі Ейлерові теореми з цього обсягу. Мене цікавить, чи і як можна довести, що Ваша функція є аналітична, бо в кожнім разі її Ріманова поверхня повинна мати безліч листків, і мабуть на перший раз треба старатися, коли можливо, виділити якусь одну її вартість. Мені на перший погляд здалося, що взагалі цю функцію можна вважати за визначену лише на простолінійному відтинку $(0,1)$, але можливо, що я помиляюся.

Науково працюю я тепер дуже мало і майже безрезультатно. Як Ваша ласка, то прийміть до Sitzungsbericht'ів мою замітку «Note sur les déterminantés», що при цьому пересилаю[49].

Професор Чайковський розвиває велику бібліографічну роботу[50] та заходжується взятися до організації праці над математичною частиною Української Радянської Енциклопедії.

З глибокою пошаною до Вас

Ваш *М. Кравчук*

Київ, 17.10.31
вул. Короленка, 55, ВУАН

Високоповажаний Пане Редактор,

Пересилаю Вам на розгляд замітку мого учня, талановитого молодого математика Олександра Смогоржевського[51]. Він давно хотів щось подати до журналів, що Ви редагуєте. Цю замітку він написав стисло, в стилі Ваших «Sitzungsbericht'ів», де хотів би бачити її надрукованою.

Моя наукова продукція підупала, як і здоров'я.

Хотів би дістати від Вас яку вісточку.

З глибокою пошаною до Вас

М. Кравчук

Примітки

У примітках використано дані П. Хобзея, котрий уперше опублікував ці листи 1990 р. — у скороченому вигляді. Скорочення в листах позначено [...].

1. Левицький В. (1872–1956) — український математик, професор, голова математично-природописно-лікарської секції Наукового Товариства ім. Шевченка (МПЛС НТШ).

2. *Curriculum vitae* (латин.) — автобіографія.

3. М. Кравчука було обрано дійсним членом НТШ 14.05.1925 р.

4. Ці статті опубліковано у збірнику «Збірнику МПЛС НТШ», т. XXV (1926), с. 72–81 і 82–92.

5. Математичне товариство Палермо (Італія). М. Кравчук друкувався у журналі цього товариства «Rendiconti del Circolo Matematica di Palermo».

6. Піконе М. (1885—1977) — італійський математик, засновник і директор (1927–1960) Національного інституту прикладного аналізу.

7. Німецьке математичне товариство.

8. Мається на увазі XXV т. «Збірника МПЛС НТШ».

9. Журнал «Sitzungsbericht der math.-naturwiss.-arztl. Sektion» видавала МПЛС НТШ з 1924 р.

10. Бібербах Л. — німецький математик.

11. Мається на увазі «Jahresbericht der Deutsche Mathematiker Vereiningung». («Журнал Нім. матем. товариства»).

12. Тут помилка: треба 1927, що випливає із поштового штампу.

13. Societé Mathématique de France — Математичне товариство Франції. 24.10.1928 М. Кравчук на засіданні цього товариства зробив доповідь «Про одне застосування теореми Штурма».

14. Васильєв О. В. (1853–1929) — російський математик. Тут мова йде про книжку «Ціле число. Історичний нарис» (Пг., 1922).

15. М. Крилова було обрано дійсним членом НТШ 24.03.1927 р.

16. Журнал «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris».

17. Монтель П. (1876–1975) — французький математик; член Паризької АН (з 1937 р.), її президент в 1958 р.

18. Мова йде про статтю М.Кравчука «Uber vertanschbare Matrizen» (Rend. circ. mat. Palermo. — 1927. — № 51. — С.126–130).

19. Мовиться про 30-річчя діяльності МПЛС НТШ і 30-річчя редакторської діяльності В. ЛевицькогоЦьому ювілеєві було присвячено XXVI т. «Збірника МПЛС НТШ» (1927).

20. Під заголовком.

21. Ця стаття була опублікована в т. XXVI «Збірника МПЛС НТШ», с. 85–96.

22. Високоповажаному панові Докторові.

23. Цю статтю В. Левицького вміщено в «Записках КІНО» (1927. — 3. — С. 229–234.)

24. Брошура «Математика серед наук» (Львів, 1927) містила три статті:

В. Левицького «Вартість математики» (с. 3–24), М. Зарицького «Правда, краса й математика». (с. 25–37), І. Свєнціцького «Наука наук» (с. 39–57).

25. Йдеться про публікацію: Левицький В. Й., Кравчук М. П. Формула Стірлінга // Записки КСГІ. — 1927. — 2. — С. 89–90.

26. Фотографію В. Левицького було вміщено в XXVI т. «Збірника МПЛС НТШ» (1930).

27. Левицький В. Й. Сто миль на колесі. — Львів: З друкарні НТШ, 1925. — 38 с.

28. Цю статтю було опубліковано у XXVIII—XXIX т. «Збірника МПЛС НТШ» (1930).

29. Пулюй Іван (1845–1918) — український фізик і електротехнік. Один із засновників науки про Х-промені, перший декан першого в Європі електротехнічного факультету при Вищій німецькій технічній школі в Празі, ректор цієї школи (1899—1900).

30. Мається на увазі стаття про трактрису.

31. Кравчук М. П. Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів // Збірник МПЛС НТШ. — 1928. — XXVII. — С.112—128.

32. Про трактрису.

33. Мовиться про VIII Всесвітній конгрес математиків (Болонья, 2–10.09.1928 р.).

34. Відвідати Львів та Луцьк М. Кравчук не зміг через відмову йому в одержанні візи на поїздку в Польщу.

35. Кравчук М. П. Замітка про контурні інтеграли // Збірник МПЛС НТШ. — 1928. — XXVII. — С. 129–131.

36. Роботу В. Тракали в «Збірнику» не було опубліковано.

37. Інститут Української наукової мови у Києві існував від 1921 до 1930 р.

38. В. Левицький до Києва не приїздив.

39. Мовиться про брошуру В. Левицького «Гадки про життя». (Львів: Вид. НТШ.— 1928. — 14 с.).

40. Куренський Максим (1895–1940) — проф. (1926), д-р фіз-мат.наук (1929), член НТШ, працював в УАН (1920–1933), Ленінградському університеті (1933–1937), неодноразово друкувався в «Збірнику МПЛС НТШ».

41. Krawtchouk M. Sur un théoremé de Laguerre // C. R. Acad. Sci. — 1929. — № 188. — S. 299–302. Лагерр Е. (1834—1886) — французький математик, член Паризької АН (1884).

42. Кравчук М. П. Звідомлення з поїздки на Всесвітній Математичний Конгрес у Больонії та у Париж. — Львів: НТШ, 1929. — 13 с.

43. Семенцов А. П. До питання про українську хімічну термінологію // Збірник МПЛС НТШ. — 1930. — XXVIII–XXIX. — С. 253–258.

44. Студинський Кирило (1868–1941) — український літературознавець, академік ВУАН (1929), один час голова НТШ.

45. Крип’якевич Іван (1886—1967) — історик, член НТШ (1911), академік АН УРСР (1958).

46. Високошановного товариша.

47. Мовиться про обрання М. Кравчука академіком ВУАН.

48. Восени 1929 р. М. Чайковський за запрошенням НКО УРСР перебрався на Наддніпрянщину і влаштувався працювати в Одеський університет.

49. Йдеться про статтю М. Кравчука, вміщену в «Sitz. Math. Sect. Ševčenko» (1931. — 15. — S. 5–7).

50. М. Чайковський тоді готував до друку покажчик «Українська математична наукова бібліографія (1894–1929)» (Одеса, 1931).

51. Смогоржевський Олександр (1896–1969) — український математик.

НОТАТКИ З ПОДОРОЖІ*†

Цієї осени мені довелося відвідати де-які країни Західної Європи. Головна мета подорожі була участь у міжнародному з'їзді математиків у Болоньї 2/10 вересня цього року, де я, разом з академіком Ю. Пфейфером, був делегатом від Київського ІНО, а також репрезентував Українське Наукове Товариство у Львові. Звіт з моєї подорожі побачить, мабуть, світ десь инде, а на сторінках цього часопису я дозволю собі поділитися частиною моїх дорожніх нотаток за Польщу та Італію.

Від нашої прикордонної станції Шепетівки, де оглядають речі та пашпорти, до польського кордону ще кілька-десять кілометрів. При самому кордоні малесенька польська станція Могиляни; перед нею до вагонів заходять польські урядовці та відбирають пашпорти: віддадуть їх аж у Здолбунові, де при митному огляді особливо дошукуватимуться цигарок і тютюну і підозріло розглядатимуть ваші книжки. На здолбунівському двірці мало що змінилося з царських часів — тільки чути скрізь мову польську замість російської. Всі урядовці — до найдрібніших, навіть носії — поляки зі справжньої Польщи.

За годину, намінявши польських грошей (по вісім злотих за долар), мені вдалося здобути м'яке місце для спання в варшавському експресі, і я перележав маю батьківщину — Волинь. Не дуже спалося: дратували провідники, несамовитим криком оповіщаючи кожну станцію, мулили думки за долю цього гарного краю та спомини за пережиті тут роки; минали станцію Киверці, звідки раптом кілька кілометрів до рідного села та до Луцького, де я ріс і вчився. Ранок привітав пісенесенькими полями, пісками та болотами під Варшавою.

По двох місцях мені довелося їхати тією самою дорогою Варшава — Здолбунів вертаючись до Києва. Зі мною в купе третьої класи сиділи: молодий студент — правник варшавського університету та колиш-

---

* 1. Кузня освіти. — 1928. — № 2. — С. 3–6.

2. Михайло Кравчук. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — НТУУ «КПІ», 2000. — 232 с.

† Примітка редакції [Кузні освіти]. На прохання редакції автор ласкаво згодився дати їх для «Кузні освіти» із своєї записної книжки, хоч вони не призначалися для друку.

ній легіонер — пілсудчик, що півтора роки тому дістав земельний наділ (14 гект.) на кресах десь під Володимиром-Волинським.

Обидва (на шкодуючи компліментів за мою польську мову) з інтересом розпитували: чим держиться наша держава та суспільство, знищивши релігію та мораль («ще радикальніше як французи»), як годяться батьки з примусовим поголовним відбіранням дітей до дитячих будинків; чи не шкодить наша самоізоляція від сусідів та від решти Європи розвиткові нашої культури. Не знаю, чи вони повірили, коли я заперечив правдивість де-яких із їх відомостей. Але вони трохи зніяковіли, коли з приводу запитання за самоізоляцію я навів два факти: 1) вертаючися з міжнародного з'їзду математиків, я не зміг заїхати з науковою метою до Львова, бо Польща не згодилася дати мені в'їздну візу 2) жоден з українських математиків у Польщі не мав змоги побувати на згаданому з'їзді. Це було 2 листопада на другій день по львівськім українськім погромі, і тому зрозуміло, що розмова моїх сусідів крутилася коло становища польського елементу на східних, особливо, українських землях. Висновки обох що-до колонізаційної польської політики були песимістичні: мовляв гатиться на «креси» живі сили польського народу, щоб створити барикади проти східнього ворога, але забувається за чужу мужицьку стихію позаду цих барикад, що в кращому випадку асимілює колоністів, а в разі якогось політичного замішання винищить їх у пень.

Чекаючи на поїзд Варшава — Познань — Берлін, я проїхав головними вулицями Варшави та посидів у одній із найбільших кав'ярень на вулиці Маршалковській. Коли покластися на мої спомини з раннього дитинства, то Варшава стала більша, але брудніша. Отже поляки тепер мають більше підстав називати її маленьким Парижем; чи не для того, щоб іще краще справдити цю назву, будують міську підземну залізницю, бо вуличний рух у Варшаві не такий великий. Життя (особливо одежа) у Варшаві і взагалі у Польщі дешевше не тільки проти Німеччини, а й проти Франції, але й заробітки службовців та робітників — дуже малі. Кваліфікований робітник одержує злотих із 40* на тиждень; вчитель елементарної школи в місті — щось із 250 злотих на місяць, при великому навантаженні. Згадуваний колоніст-пілсудчик казав, що воліє порпатись у землі, хоч ніколи не ходив коло неї, ніж бути державним урядовцем на півголодному утриманні.

* Коло 10 карб. [Прим. Редакції «Кузні освіти»].

Серед поступовішого вчительства помітна течія на користь професіоналізації середньої освіти (за нашим зразком), але шляхетські та клерикальні верстви суспільства чинять опір цим тенденціям. Церковники, з'осібна єзуїти, мають велику силу в усіх учбових закладах, а в Любліні є цілий католицький (приватний) університет; той, хто закінчить науку в ньому й переходить через спеціяльну державну іспитову комісію, дістає ті самі права, що й у державних університетах.

Варшавський університет має нечувану кількість, 11.000, студентів, що просто розсаджають авдиторії та нищать лабораторії. Професура одностайно скаржиться на слабу загально-освітню підготовку студентства, а статистика дає відсоток закінчення вищої школи вдвоє менший проти Німеччини.

Цукерня Яна Фрузінського* на Маршалковій вулиці є єдине, що в Варшаві нагадало мені Україну.

Я в'їхав до Італії через Тироль. Частина його тепер належить Італії. На прикордонній станції Бренер (що в італійців тепер вимовляється тепер Бренеро) я зразу нахопився на неприємність: я мав тут купити пільговий залізничний білет до Болоньї — за пів-ціни, як член з'їзду; але фашистський міліціонер у купі з якимось урядовцем забрали мого пашпорта й тримали його доти, поки не вирушив поїзд, не випускаючи й мене з вагону; довелося, після прикрої розмови, взяти у кондуктора звичайний білет до найближчої більшої станції.

Докучає в Італії жахлива тіснота в вагонах другого класу та часом брак місць у першому (в третьому італійськими залізницями я не зважився їздити). Тим часом кондуктори та міліціонери загрожують штрафом, коли ви, не маючи місця, притулилися десь у куточку на власній валізі.

Як компенсація за ці неприємності, вам зір пестять прегарні тирольські гори, ліси та ріки; наче на забавку пороблені та розмальовані городи й виноградники; ясне небо й незвичні перспективи; моторні, голосні люди та сила незвичайних цікавих подробиць оточення.

Сонце вже підбилося високо. Спека така, як тільки часом у нас трапляється в липні. Ломбардські поля рудіють голою сухою землею поміж рясними перетиками з куцих почикрежених дерев, що підтримують розкішні виноградні лози обтяжені зеленими та синіми гронами. Сохнуть велетенські коноплі (втроє, вчетверо вищі за наші); сох-

* Цукерня під цієї фірмою існує віддавна в Києві [Прим. Редакції «Кузні освіти»].

нуть цукрові буряки в кагатах та вагонах на станціях; зрідка око надибує пересохле річище або канаву зі скупо приділеною іригаційною водою. Де-не-де манячить стіжок пшениці або скирта соломи.

Позаду зникає Верона, наче зроблена зі шкла й порцеляни та задимлена молочною парою. Мерехтять невеличкі порожні степові станції. Наближаємося до великої ріки.

Розчарування: береги По плоскі, майже голі; води, правда, багато, але це якийсь рудий жур, сколочений із землі та гною, вкритий брудною піною та ріжними покидьками з польових іригаційних канав.

А далі знов ті самі степові картини, знов суша; серпень-вересень у Ломбардії є найпосушливіша доба року.

Аж ось лінії обрію починають хвилюватися — поїзд підходить до відногів Апенін, і хутко ви злізаєте на великому, але майже порожньому болонському двірці.

Спеціяльного бюра для інформації та допомоги членам з'їзду на двірці вже не було, бо я спізнився на початок з'їзду, алей цілий гурт людей охоче взявся дати мені всякі пояснення та поради, і за п'ять хвилин їзди на таксі я був уже в старому місті, біля університету, в бурсі для середньошкільників, прадавньому будинку, де мені судилося прожити тиждень мойого перебування в Болоньї.

Вулички цієї частини міста вузенькі, криві, та майже мертві, особливо підчас найбільшої спеки, між 12 та 3 год., коли все ділове життя,— майстерні, бюра, торгівля — завмирає, а люди снідають та відпочивають.

Я не бачив зразу нового міста, що буйно розрослося кругом старих кварталів, і до вечора ходив овіяний чаром давнини, між будинками, що бачили Коперніка та Кордано, по панелях поспіль затінених колонадами, що давали холодок ще Дантові.

Але ось на тлі вечірнього неба дві вежі з червоної цегли, одна рівна, друга похила. Може це брама, що виведе мене з сонного царства? Іду й справді потрапляю на людну площу до самого центру нового міста в чай найінтесивнішого вуличного життя, з нестриманим людським гамором, музикою, з повними ресторанами, кав'ярнями, сиренами автомобілів та повітрям густо затруєним бензиною. Ще два-три квартали — доми нижчають, рідшають, прокидаються латочки садків, і ось кількома парами чудових рябих огрядних волів оруть город якісь велетні в солом'яних брилях, вивертаючи колосальні скиби землі. В далекій перспективі — хвилястий краєвид із кипарисами, що нашому незвичному окові нагадує швидше картину чужого майстра, як живу натуру. Нюх гостро дратує теж незвичний запах тутешньої землі та гною.

З'їзд, як інтернаціональний, провадився мовами французькою, англійською, німецькою, італійською (та була дозволена ще мова «інтерлінґва» або «лятіно сіне флєксіонс», латинська з дуже спрощеною граматикою — витвір відомого італійського математика Пеано). Але італійщина намагалася переважити хоч-би в дрібницях: в написах, в текстах членськів квитків, в програмах та в медалях для учасників з'їзду, прикрашених італійською трикольоровою стрічкою та фашистським гербом (жмут різок із сокирою). Як анекдотичний приклад національного самохвальства, можна навести такий факт: одна болонська газета, звернувши увагу на те, як ретельно чужинці-математики перевіряють рахунки в ресторанах, з пихою зазначила, що проте італійські кельнери показалися мудрішими за учених мужів і добре їх обдурювали.

Затримавшися в Болоньї ще днів на два по закінченні з'їзду в справах рукопису моєї доповіді, відвідин деяких пам'ятників та музеїв, кореспонденції то-що, я заїхав тоді на кілька днів до Флоренції — одного з найславетніших мистецьких осередків Італії. Там відвідав «Старий Палац» (проти нього на площі кругла металічна плита на місці, ще спалено Савонаролу), галерею Уффічі, палац Пітті, флорентійський собор, сакристерію, церкву «Св. Марія Нова» та побував у приміському гірському містечку Ф'єзоле (недалеко від нього — віла, де Бокачіо писав «Декамерона»). Заїхавши ще на кілька годин до Мілану, щоб завізувати пашпорта в радянського консула, оглянути «восьме чудо світу» — міланський собор та відвідати церкву Св. Марія Милостива, куди, як до Меки ходять розглядати рештки славетної фрески Леонардо да Вінчі «Тайна Вечеря» (Ченакольо), я засів на кілька днів у малесенькому містечку Споторно (на італійській Рів'єрі, недалеко від Генуї), щоб закінчити деякі свої рукописи та відпочити перед подоріжжю до Парижу.

Чорні фашистські сорочки на чоловіках та жінках, несчислена фашистська міліція та поліція в опереткових уніформах, попи, ченці, черниці ріжних орденів; газети та журнали, що одностайно кадять офіційному божкові «дуче» Мусоліні, його братові, йог батькам, дітям та вишукують у нього та в усієї його родини десятки найріжноманітніших талантів; безробітні, що потай пошепки просять у вас на хліб; таємні чутки, що Мусоліні має незабаром скинути короля і посадити на трон якусь креатуру з королівської родини, оженивши зі своєю дочкою, що Мусоліні має проголосити себе цісарем, щоб довершити історичну місію італійської нації — утворити всесвітню державу,— все це згадувалося як сон, коли я кількома днями пізніше сидів у театрі-кабаре «Ноктамбюль» у Латинському кварталі в Парижі та слухав куплетиста, що в'їдливо й дотепно висмівав і «дуче» його однодумців і їхні мрії.

МАТЕМАТИЧНА НАУКА НА УКРАЇНІ (ЗА ДЕСЯТИРІЧЧЯ 1918–1928)*

Лютнева і жовтнева революції 17 року поставили перед українськими математиками два завдання: 1) утворення укр[аїнської] матем[атичної] термінології та вкраїнських підручників математики; 2) розвиток і організацію дослідницької роботи в обсягу математичних наук.

Можна сказати, що на сьогодні перше завдання в головному і в загальних рисах виконано завдяки збігові трьох сприятливих факторів: життя й державна влада настирливо вимагали вкраїнської математичної мови та вкраїнського підручника для трудової та для професійної школи; в Галичині, особливо невтомною працею голови математ[ично]-природописно-лікарської секції Наук[ового] Т[оварист]ва ім. Шевченка — В. Левицького — вже багато було зроблено в цій справі (в формі «Матеріялів» згаданого автора до математ[ичної] та фізичної термінології, друкованих в «Записках» секції[a] в перших роках XX-го століття, та низки підручників для шкіл нижчих та середніх); знайшовся на самім початку революції гурт математиків — переважно ентузіястичної молоді, що пристосувала галицькі набутки до наддніпрянських умов і доповнила їх.

На початку революції особливо слід відзначити роботу двох громадських організацій на цій ниві: математичної підкомісії термінологічної комісії при Укр[аїнському] Наук[овому] Т[оварист]ві в Києві, що почала широку роботу збирання та утворення математ[ичної] укр[аїнської] термінології, та комісії математиків при колишньому Київ[ському] Т[оварист]ві Шкільної освіти, що видала три перші невеличкі термінологічно-фразеологічні збірки 1917 р. в формі програм (проєкт арифметичної термінології подав В. Шарко, а алгебричної та

---

* 1. Українські вісті (Париж). — 1928. — № 76.

2. (Публ. та комент. П.К. Хобзея) // Очерки истории естествознания и техники. — 1991. — Вып. 40. — С. 60–64.

3. Михайло Кравчук. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — НТУУ «КПІ», 2000. — 232 с.

Числові виноски зроблено для цитування у статті «Михайло Кравчук як історик математики».

геометричної — М. Кравчук) та перші елементарні підручники та задачники (Шарка, Шульгіної-Іщук, Басараба, Чепіги).

Пізніше ріжні укр[аїнські] вид[авницт]ва, а переважно Державне вид[авництво] [України], взяли на себе видання математичних підручників, і тепер вони нараховуються десятками для трудшкіл; менше забезпечені профшколи, але й тут можна назвати кілька книг: підручники алгебри та задачники з алгебри Граве, Лебединцева, Шапошнікова й Вальцева (переклад); геометрії — Астряба, Кисельова (переклад); тригонометрії — Чечеля, Чайковського; підручник математики для сільськогосп[одарських] профшкіл Кравчука та Білика та декілька инших. Сюди-ж треба долучити книжки, збірки та журнальні статті методичного характеру в дуже поважній кількості. Неповна бібліографія за 1927 р. у обсягу підручників і методики елементарної математики дає коло 100 назв.

Щодо **термінології** математики, то головну роботу тут проводила згадана математична підкомісія при Укр[аїнському] Наук[овому] Т[оварист]ві в Київі, що пізніше стала матем[атичною] секцією природ[ничого] відділу ІУНМ (Інститут української наук[ової] мови) при УАН (коли НТ злилося з УАН). Кількарічна праця під головуванням проф. М. Кравчука та проф. М. Столярова мала наслідком два томи «Математичного Словника», виданого ДВУ, і 3-й том, що є в друку; тяжку і відповідальну роботу збирання матеріялу та готування до друку провели Ф. Калинович (для перших двох томів) та Ф. Калинович і Г. Холодний (для третього тому)[б]. З приємністю слід відзначити, що крім багатьох математиків наддніпрянців в роботі над словником брали чинну участь і мат[ематично]-природ[описно]-лікарська секція Н[аукового] Т[оварист]ва ім. Шевченка у Львові.

Не можна не відзначити, що термінологічна праця в обсягу математики проводилася і поза ІУНМ; багато за згадане десятиріччя з'явилося збірок ріжної цінности; крім трьох, виданих Т[оварист]вом Шкільної Освіти, слід згадати збірки Федорова[в] Одеської Наук[ово]-дослідчої Катедри математики (за ред. проф. Крижанівського) та инші.

Завдяки широкій шкільній практиці всі згадані підручники та матеріяли не лишаються мертвим академічним грузом, а використовуються, поліпшуються, перебираються в щоденному вжитку, і можна було б назвати чимало досягнень укр[аїнських] математиків-методистів (згадаймо таких, як Щербина, Астряб, Барицький, Воропай, Михаловський та инші) та багато суто математичних слів, що збагатили за останніх років нашу літературну мову (прим., відтинок, осередній, рівнобіжний, додатній, від'ємний, рівняння і т. инш.).

На черзі стоїть видання спеціяльного журналу, присвяченого викладанню та методиці математики.

Менше забезпечена укр[аїнською] підручною літературою вища школа, але й тут справа вже зрушила з мертвої точки. Можна назвати цілу низку поважних курсів почасти друкованих, почасти шклографованих, що з'явилися в останніх 2–3 роки в Київі, Харкові, Одесі та деяких инших містах.

Поруч з цими успіхами укр[аїнської] матем[атичної] термінології та вкр[анського] матем[атичного] підручника ідуть такі самі успіхи в справі **українізації** викладання математики. [1]В школах труд[ових] та проф[есійних] з укр[аїнською] викладовою мовою за малими винятками математика цілком забезпечена укр[аїнськими] викладачами. У вищій школі справа стоїть слабше, перед у цій справі веде Київ, де математика викладається укр[аїнською] мовою.[2]

Тут не можна не відзначити, що [3]деякі представники старого покоління професури, що могли б здобути в НКО[г] право викладати по-руськи, все-таки з'українізувалися самі під впливом укр[аїнського] середовища — професури молодшої генерації та студентства.

Стан українізації математичних викладів у вищих школах треба вважати за величезний поступ, коли взяти під увагу брак укр[аїнських] підручників і те, що ще року 23-го в такому місті, як Київ, раптом 1–2 професори-математики викладали укр[аїнською] мовою.[4]

Науково-дослідницька робота

Щодо організації науково-дослідницької роботи в обсягу математики на Рад[янській] Україні за часів революції, то тут можна відзначити декілька етапів. Облишаючи перші зародки укр[аїнської] математ[ичної] думки в працях Укр[аїнського] Наук[ового] Т[оварист]ва в Київі перед революцією, як перший етап, треба відзначити організацію математичної секції Природ[ничого] Відділу Укр[аїнського] Наук[ового] Т[оварист]ва в Київі. Вона об'єднала досить широке коло людей і на протязі двох років відбула багато засідань з цінними доповідями, перша президія її складалася з проф. Граве, Кравчука, Калиновича.

Як найближче своє завдання, секція мала видання інтернаціонального математичного журналу. Брак коштів, бурхливе політичне життя та злиття Н[аукового] Т[оварист]ва з УАН, що саме під той час з'організувалася,— не дали змоги здійснити цей план.

Другий етап — концентрація матем[атичної] наукової думки навколо трьох (а пізніше чотирьох) математичних катедр фіз[ико]-матем[атичного] (ІІ-го) Відділу УАН (Академіки Бернштейн, Граве, Крилов, Пфейфер), що знаходила собі імпульси до роботи та вияв у ріжних семінарах, комісіях та инших спеціяльних установах і організаціях УАН. З 1922 р. УАН видає «Записки Ф.-М. Відділу», а трохи пізніше почала видавати «Труди» цього відділу, де праця академіків та їх співробітників (переважно молоді) виявляється досить поважно. Акад. Граве утворив школу, що працює в обсягу застосувань математики до фізики та техніки, праці акад. Крилова та його учнів стосуються переважно рівнянь математичної фізики та інженерної справи; акад. Пфейфер та його учні працюють головно в обсягу дифер[енціальних] рівнянь з частинними похідними в напрямі розшукання загальних розв'язків.

Останній етап, приблизно з р. 1924, можна назвати добою зв'язків із математ[ичною] наукою чужих країн та Зах[ідної] України і організованої праці над підготовкою молодого покоління математиків. З цього часу налагоджується широкий обмін виданнями між УАН та багатьма науковими установами та видатними наук. робітниками СРСР, Европи, Америки та Далекого Сходу, чому особливо сприяла подорож академіка М. Крилова в другій половині 1924 р. до Канади (на всесвіт[ній] з'їзд матем[атиків] в Торонто) та до Парижу. Крім представництва на з'їзді від України то головування в одній із секцій з'їзду (акад. Крилов), доповідей на з'їзді (Крилов, Кравчук), акад. Крилов привіз до УАН запрошення взяти участь у паризькому виданні «Меморіяль де Сьянс математік», і тепер УАН числиться як один з патронів цього видання, разом із академіями Паризькою, Римською та иншими. Цей «Меморіяль» має характер великої енциклопедії математики, і УАН бере в особі своїх членів, акад. Бернштейна і акад. Крилова, чинну участь у ньому.

Трохи пізніше УАН прийняла патронаж також над паризьким виданням подібного ж характеру «Меморіяль де Сьянс фізік».

Наукові подорожі до Зах[ідної] Европи згаданих наших учених (відзначимо тут акад. Бернштейна, акад. Крилова, акад. Пфейфера, проф. Сінцова) в останніх часах значно поширили і зміцнили наук[ові] зв'язки з закордоном.

До фактів, що мають особливу увагу в цій справі, треба зарахувати курс лекцій акад. Бернштейна (в Парижі, в Сорбоні), що його видав Готьє-Віляр, конференції акад. Крилова в Неаполі, Болонії, Страсбургу та його курс лекцій у Коїмбрі (Португалія). Обидва зазначені учені мали спеціяльне запрошення і їх лекції мали характер спеціяльних викладів власних дослідів.

Серед своїх членів-кореспондентів та співробітників УАН має значну кількість чужомовних учених (навіть Далекого Сходу — Японія). Так само наші учені є членами багатьох зах[ідно]-европ[ейських] та американських наук[ових] т[оварист]в і академій; з'осібна акад. Бернштейн є лауреат Паризької Академії Наук та акад. Крилов — член-кoресп[ондент] Коїмбрської Академії.

В близькому часі має вийти в світ науковий ювілейний збірник на честь першого академіка-математика УАН проф. Д. Граве; в цьому збірнику візьмуть участь не лише ближчі його товариші та учні, але [й] найвидатніші учені СРСР та закордонні; серед останніх є його учні, що відограють видатну ролю в сучасній науці та займають катедри по закордонних університетах.

З другого боку, приблизно з того самого часу (1924 р.) остаточно викристалізовуються нові математичні науково-дослідчі установи — науково-дослідчі катедри математики, що мають на меті не лише наукові досліди, але й готування молоді, що по закінченні вищих шкіл бажає спеціялізуватися в науці і зробитися викладачами вищих шкіл. Багато цих молодиків (аспірантів) вже відбули цю підготовчу роботу (3 роки), числяться нині науковими співробітниками н[ауково]-досл[ідчих] катедр, працюють самостійно науково і з великим успіхом провадять навчальну роботу по вищих школах — як помічну асистентську, так і самостійну. [5]Слід відзначити роботу трьох Харківських н[ауково]-досл[ідчих] катедр (акад. Бернштейн, проф. Русян, проф. Сінцов), що видають друкований орган (редагує проф. Сінцов); він тепер прийняв назву відродженого нещодавно Харк[івського] матем[атичного] Т[оварист]ва; друкує на всіх мовах. Тепер у Харкові організується наук[ово]-досл[ідчий] Інститут математики, що матиме значний бюджет і зможе поглибити та поширити роботу катедр.

Київська наук[ово]-досл[ідча] катедра математики об'єднує велику кількість працівників і друкує свої праці в «Записках» та «Трудах» Фіз[ико]-Мат[ематичного] ВідділуУАН мовами укр[аїнською] та зах[ідно]-европейськими — францу[зькою], нім[ецькою], англ[ійською].

Одеська наук[ово]-досл[ідча] катедра математики має свій орган — ріжномовний.

Праці укр[аїнських] математиків, крім зазначених органів, з'являються в значній кількости в наукових матем[атичних] журналах Ленінграду, Москви та инших міст СРСР, а також Европи, Америки та Японії. Чимало з'являється у Франції, з'осібна в «Звітах» Паризької Акад[емії] Наук.[6] Із укр[аїнських] видань, де друкуються наші математики, можна назати крім зазначених, цілу низку «Вістей» та «Записок» ріжних вищих укр[аїнських] шкіл та наук[ово]-досл[ідчих] установ технічного характеру.

[7]Особливо слід відзначити досить тісний зв'язок наших математиків із матем[атично]-природ[описно]-лік[арською] секцією Наук[ового] Т[оварист]ва ім. Шевченка. Наші математики (Ахієзер, Граве, Кравчук, Крилов, Чорний) друкують свої праці в «Записках»[а] секції та в її «Німец[ькомовних] Звітах», а також уміщують у наддніпрянських виданнях праці математиків Зах[ідної] України (проф. Левицький).

Дехто з наших математиків є дійсні члени Н[аукового] Т[оварист]ва ім. Шевченка (Граве, Кравчук, Крилов). Було б очевидно бажано притягати галицьку молодь до роботи в наших наук[ово]-досл[ідчих] матем[атичних] установах, як аспірантів.[8]

Питома вага укр[аїнської] математики в СРСР дуже значна; щоб не говорити довго, відзначимо, що декілька з наших академіків-математиків є зараз членами-кореспонд[ентами] Академії СРСР (Бернштейн, Граве, Крилов) і вона доручила, напр. Бернштейнові та Крилову представництво на останньому всесвітньому з'їзді математиків в Болоньї (Італія) на початку вересня ц.р. Наші академіки-матем[атики] фігурують також, яко кандидати, до Академії СРСР на найближчих виборах.

Примітки

Передрук статті «Математична наука на Україні» був підписаний криптонімом «Х.». У «Звідомленні з поїздки на Всесвітній Математичний Конгрес у Больонії та у Париж» М. Кравчук засвідчив, що цей криптонім належить йому.

[а] // Точніше — у «Збірниках» МПЛС НТШ.

[б] // Тут ідеться про три випуски (а не «томи») «Словника математичної термінології. Проєкт». До першого та другого випусків увійшли терміни «чистої математики» й «чистої механіки»; третій випуск мав охоплювати астрономічні та геодезичні терміни.

[в] // Цей автор підписувався Хведорів.

[г] // Народний Комісаріат Освіти.

ЗВІДОМЛЕННЯ З ПОЇЗДКИ НА ВСЕСВІТНІЙ МАТЕМАТИЧНИЙ КОНҐРЕС У БОЛЬОНІЇ ТА У ПАРИЖ*†

Взимку 1927–28 року я заходився добувати наукове відрядження до Німеччини, Італії та Франції на 3 місяці, з 15 VII до 15 XI 1928 р., зазначивши як головну мету подорожі участь у черговому *Всесвітньому Конґресі Математиків* у Болонії 2–10 вересня 1928 року та як побічні — ознайомлення з науковим математичним життям тих країн, математичною літературою та станом математичної освіти.

По весні, одержавши перші сприятливі відомості з Народного Комісаріяту Освіти, я звернувся до Голови Виконавчої Комісії та майбутнього президента Конґресу, професора Болонського Університету Salvatore Pincherle, а також до італійського консула в Одесі з проханням добути мені дозвіл на італійську візу, і дістав завчасу сприятливі відповіді. Тоді я послав до Секретаріяту Конґресу заголовки моїх двох доповідей, їх короткий зміст для довідника Argomenti dei Comunicazioni (Змісти доповідей) та 50 лір членського внеску.

Діставши відповідь, що доповіді вписано до програми Конґресу, я в липні звернувся до Народного Комісаріяту Освіти з проханням прискорити мою справу. Відповідь вимагала від мене змісту доповідей. Я негайно особисто завіз до Упрнауки належні матеріяли і дістав запевнення про швидке та сприятливе розвязання справи. Але, бачучи, що лишилося дуже мало часу, я зразу ж виготовив і остаточні тексти доповідей та відіслав їх Генеральному Секретареві Виконавчої Комісії Конґресу професорові E. Bortolotti, а копії — професорам Tonelli та Burgatti, керовникам підготовчої роботи до праці I та III секцій Конґресу (до цих секцій належали своїм змістом мої доповіді).

---

* 1. Львів: З друкарні Наукового товариства ім. Шевченка, 1929. — 13 с.

2. Михайло Кравчук. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — НТУУ «КПІ», 2000. — 232 с.

† Автор брав участь в Конґресі як делеґат київського Інституту Народної Освіти та Львівського Наукового товариства ім. Шевченка.

До Болонії я приїхав із запізненням, 7-го вересня вранці. Завдяки щасливому випадкові (відїздові якогось конґресиста) я дістав кімнату в тім самім колледжі Zocca, де її було мені призначено заздалегідь, поблизу Університету, місця засідань Конґресу.

Перебування на Конґресі та в Італії

Цей день був як раз перервою між першою та другою половиною Конґресу; дехто з учасників, між ними найбільший сучасний математик D. Hilbert, уже виїхав зовсім, більшість поїхала в екскурсії до ріжних міст північної Італії та на огляд нової гідроелектричної станції на Lago di Ledro.

Довідавшися, що підсекція I-A, де стояла одна з моїх доповідей 5 вересня, вже закінчила роботу, і що друга моя доповідь мала бути 6 вересня в підсекції III-B, я забезпечив собі право доповісти її 8-го.

Другого дня, відвідавши цікаві конференції віце-президента Конґресу, московського професора Н. Н. Лузина «Про шляхи теорії множин» (Sur les voies de la théorie des ensembles) та італійського вченого Marcolongo «Леонардо да Вінчі в історії математики та механіки» (Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica) і забезпечивши собі візу у французького консула в Болонії, я доповів «Про наближену інтеґрацію лінійних диференціяльних рівнань» (Sur l'intégration approchée des équations différentielles linéaires). В цій доповіді було подано і доведено між иншими таку загальну теорему:

Коли рівняння:

$$L(y) = y^{(k)} + A_1(x)y^{(k-1)} + \dots + A_k(x)y = f(x)$$

має інтеґрал, що справджує граничні умови типу

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left[\alpha_i^{(k)}y(0) + \beta_i^{(k)}y(1)\right] = 0$$

і коли функції $\varphi_i(x)$ справджують ті самі умови (1), а функції $\varphi_i^{(k)}(x)$ творять повну систему, то функція

$$y_m = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$$

визначена рівняннями:

$$\lim_{m=\infty} y_m = y, \lim_{m=\infty} y'_m = y', \dots, \lim_{m=\infty} y_m^{(k-1)} = y^{(k-1)}.$$

Притім можна визначити ступінь похибки рівностей

$$y^{(i)} - y_m^{(i)} \simeq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

в залежності від m, а функції $\varphi_i(x)$ узяти в формі многочленів.

Коротко кажучи, доведено збіжність одного загального способу наближеної інтеґрації диференціяльних рівнань. Ступінь загальности цього висліду виявляється з того, що він покриває славетний Ritz'ів спосіб, що подані міркування доводять збіжність способу в найзагальнішім випадку, без будь-яких обмежень, що до функцій $A_i(x)$, (чого W. Ritz не зробив); що їх можна дуже легко поширити на системи диференціяльних рівнань, на рівнання інтеґральні, на визначення фундаментальних чисел та фундаментальних функцій то що.

У звязку з моєю доповіддю цікаві та компетентні уваги зробив акад. М. Крилов та голова зборів проф. A. Rosenblatt (автор відомих праць, де він між иншим розробляв досліди геніяльного російського математика Ляпунова). Визнано цінність способу і висловлено побажання, щоб подані в доповіді думки було розроблено в дальших працях, що я й маю намір зробити невдовзі.

Українських математиків, делеґованих од ріжних установ, було на Конґресі, не рахуючи мене, четверо: акад. С. Бернштейн (Харків), акад. М. Крилов (Київ), акад. Ю. Пфейфер (Київ), проф. Д. Сінцов (Харків). Перші двоє репрезентували також Академію Наук СРСР та головували на засіданнях секцій Конґресу. З решти республік СРСР було математиків чоловіка до 30. На жаль, не було нікого з західно-вкраїнських математиків, і представництво від Українського Наукового товариства ім. Шевченка у Львові було доручено мені, як його членові.

На Конґресі я мав нагоду познайомитися, поновити знайомість та провадити математичні розмови ще з низкою математиків із СРСР та закордонних. Приємні та корисні були для мене зустрічі з професорами Лузиним, Меньшовим, Лаврентьєвим, Агрономовим, Pincherle, Bartolotti, Picone, Denjoy, Tripier, Rosenblatt'ом. Я мав надію зустрітися ще з відомим італійським математиком професором G. Vivanti, що цікавиться вкраїнською математичною літературою та листується з деким із українських математиків, але, на жаль, не застав його в Болоньї. Також дуже жалую, що упустив доповідь відомого статистика проф. Darmois; її зміст близько стосується де-яких моїх дослідів.

Ті наукові конференції, що їх було призначено на 9 вересня, не відбулися; натомість були збори Міжнародного Математичного Обєднання (Union Mathématique Internationale) за головуванням славетного бельгійського математика de la Vallée Poussin, де висловлено подяку організаторові й президенту Конґресу професорові S. Pincherle та після довгих змагань визначено Цюрих (Швайцарія) як місце наступного Коґресу 1932 року. При кінці зборів, із ініціятиви славетного французького математика J. Hadamard'a, постановлено заснувати інтернаціональну стипендію імени проф. Pincherle при Болонськім Університеті та почати збирання внесків на неї.

Закриття Конґресу відбулося 10-го вересня у Флоренції в Pallazzo Vecchio, але академік М. Крилов та я лишилися ще на два дні в Болоньї в справах рукописів наших доповідей, внесків на стипендію ім. Pincherle, кореспонденції та відвідин деяких памятників і музеїв.

Заїхавши ще до Флоренції та до Міляну, де ми візували наші пашпорти в радянському консуляті, ми задержалися на кілька днів у маленькому містечку Spotorno на італійській Рівєрі. Там я підновив свіжими літературними вказівками свою болонську доповідь, укоротив її, (бо, за постановою Конґресу, друкований текст кожної доповіди обмежено 8-ма сторінками) та відіслав до секретаріяту Конґресу. Крім того, я за цей час закінчив розвідку «*Про похідні від наближених інтеґралів де-яких диференціяльних рівнань*» (Sur les dérivées des intégrales approchées de certaines équations différentielles) та відіслав її до журналу Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. В цій розвідці я, між иншим зясовую непорозуміння, що його викликала в італійського математика Picone одна моя замітка в Comptes rendus Паризької Академії Наук; він умістив свої міркування як раз у останній книзі Rendiconti, що вийшла перед самим Конґресом.

24 вересня ми виїхали зі Spotorno до Парижа через Vontimiglia — Nice — Toulon.

Організація Конґресу

Всесвітні Конґреси Математиків відбуваються що чотири роки; на переміну в ріжних країнах світу, почавши з першого Конґресу в Цюриху року 1896. Не міг відбутися лише Конґрес року 1916 через европейську війну; Страсбурський Конґрес 1920 року на французькій території щойно завойованій у німців, пройшов під тягарем матеріяльних та моральних наслідків великої війни, без участи німців та математиків СРСР і не притяг великої уваги. Конґрес року 1924 в Toronto (Канада) був дуже численний, хоч німців не покликали через загрозу французів зректися участи, а частина англійців не приїхала на знак протесту проти бойкоту німців. Серед кількох математиків із СРСР Українську

Академію Наук та всю вкраїнську математику репрезентував академік М. Крилов, що привіз туди з України три доповіді (дві свої та одну автори цих рядків).

Там, із пропозицій болонського математика Puppini, що був тоді мером Болоньї, ухвалено обрати Болонію як місце Конґресу 1928 року. Болонія, одно з досить великих та найстаріших університетських міст Европи, з давніх часів збирала численне студентство та вчених із ріжних країн (там нпр. студіював астрономію та математику Копернік); вона вславилася такими першорядними математиками, як даль Ферро (розвязав рівнання 3 ступеня), Кававлієрі (один із основоположників аналізи нескінченно малих), Кремона, Бельтрамі та Пінкерле.

Підготовчу роботу до Конґресу, за керуванням Pincherle, було переведено добре: ми завчасу одержали загальну схему роботи Конґресу з розподілом на секції та підсекції, запрошення подати теми та короткі змісти доповідей, інформації за готелі, за ціни в ресторанах, членські квитки, квитки на пільговий проїзд по італійських залізницях то що. Вдалося зробити Конґрес інтернаціональнішим од попереднього, правда, з перевагою італійців та без де-яких видатних французів.

Як почесний президент фіґурував Мусоліні, і гадали, що він відкриє Конґрес, але він не приїхав, і від уряду промовляв, коли не помиляюся, міністер народньої освіти. В складі почесного Комітету Конґресу були голови сенату та палати депутатів, кілька міністрів, болонський архієпископ, секретар фашистської партії Turati та инші.

Зїхалося на Конґрес, разом із членами родин, до 1000 душ — організатори не сподівалися такого численного зїзду. Самих доповідей було оголошено і подано в книзі Argomenti dei Comunicazioni коло 400. Правда, відбулося їх менше, бо не всі доповідачі приїхали, а доповідати дозволялося лише особисто (такого обмеження не було на попереднім Конґресі); також надруковано буде в працях Конґресу лише фактично зроблені доповіді.

Всіх секцій працювало сім:

I. Аритметика, Алґебра, Аналіза.

II. Ґеометрія.

III. Механіка, Астрономія, Ґеодезія, Ґеофізика, Математика, Фізика, теоретична Фізика.

IV. Статистика, математична Економіка, теорія Ймовірностей, Актуарна наука.

V. Інженірна справа та застосування в Індустрії.

VI. Елементарна Математика, Питання дидактичні, математична логіка.

VII. Філософія та Історія Математики.

Притім перша секція поділялась на чотири підсекції, а друга, третя та четверта — на дві підсекції кожна; отже одночасно провадилося не раз по 13 засідань; тільки цей паралелізм та обмеження кожної доповіді 15-ма хвилинами дали змогу перепустити таку велику кількість матеріялу.

Праця Конґресу

Крім доповідей на Конґресі відбулося кілька конференцій — ширших оглядів ріжних ділянок математики. Їх було замовлено заздалегідь, в більшості дуже відомим математикам. Під час конференцій не робилося ніяких инших засідань. Із учених СРСР таку конференцію мав, як згадувано, Н. Лузин. Із видатніших инших конференцій слід відзначити Hilbert'ову «Задачі математичної логіки» (Probleme der mathematischen Logik) та Hadamard'ову «Розвиток та наукова роля функційного числення» (Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel).

Де-які учені зі своїми конференціями не прибули на Конґрес, нпр. Borel, Volterra, Enriques.

Неможливо охопити хочби в загальних рисах усю працю Конґресу. З доповідей, що ближче стоять до моїх математичних інтересів, назву тут наступні.

Секція I.

Б. Делоне (Ленінград) та *Nagell* (Осло) подали досліди над представленням цілих чисел бінарними кубічними формами з відємним дискримінантом, що творять новий розділ теорії чисел, поруч Гауссової теорії квадратичних форм.

Ory (Невшатель) подав деякі міркування про загальне квадратове рівнання в обсягу матиць:

$$XX + AX + XB + C = 0,$$

що зводиться на складну систему квадратових звичайних рівнань із n^2 невідомими, де n є порядок тих матиць. *Turnbull* дав спробу розвязати в де-яких випадках цю задачу з допомогою матицевих ланцюгових дробів.

Творець теорії майже періодичних функцій *H. Bohr* (Данія) доповідав за її сучасний стан.

Caccіopolli подав узагальнену теорію перетворення кратних інтегралів, розглядаючи якобіяни з функцій, що не мають похідних.

Гюнтер (Ленінград) доповів про взагальнення поняття Stieltjes'ового інтегралу.

В доповіді *М. Боголюбова* та *М. Крилова* дано нові досліди над застосуванням скінчених ріжниць до інтеграції диференціяльних рівнань.

Низку доповідей за рівнання з частинними похідними дали *Ю. Пфейфер* (Київ), *Colombo*, *Courant*, *Drach*, *Humbert*, *Julia*, *Lewy*, *Tricomi*, *Buhl*.

Polya доповідав за особливі точки Taylor'ового ряду.

Огляд методів конформного перетворення та уніформізації дав один із головних майстрів у цього обсяг, *P. Koebe*.

Секція III

Доповідь *Д. Граве* (Київ) мала подати нові принципи небесної механіки, звернувши увагу на мало досліджений фактор — електромагнетні сили, що ділають між небесними тілами, і що ними можна пояснити розбіжність між теорією та астрономічними спостереженнями.

Sole подав деякі математичні досліди над задачою електричних фільтрів.

Brillouin (Париж) притяг увагу до принципу найменших квадратів у математичній фізиці — обсяг, у якому з великим успіхом працював акад. М. Крилов і в якому має деякі висліди автор цих рядків.

Секція IV.

Доповідь *Cantelli* (Неаполь) про ймовірність для випадкової змінної лежати в певних межах.

Досліди *Darmois* над порівнанням статистичних рядів, що розвиваються в часі, та звязана з ними критика теорії кореляції.

Праця *Романовського* (Ташкент) над узагальненням Pearson'ової теорії кривих розподілу має тепер особливий інтерес у звязку з критикою цеї теорії, що подав проф. *Ястремський*.

Goldhitzer навів, маючи на оці спеціальні застосування, деякі міркування про наближен розвязання алґебричних рівнань; наскільки видно, він не дав нічого істотно нового проти відомого Newton'ового способу.

Секція VI.

Caminati пропонував заступити Евклідів постулят рівнобіжних постулятом, що вписаний в коло кут. спертий на поперечник, є прямий; завряд чи можна вважати цю думку за нову або за щасливу з дидактичного погляду.

Fehr коротко повідомив за 20 років роботи Інтернаціональної Комісії Математичної Освіти, що видає журнал L'Enseignement Mathématique; зясовано працю Центрального Комітету та Національних Комітетів Комісії.

Marcolongo подав міркування що до запровадження векторіяльного числення до середніх шкіл.

Vannini пропонував утворити комісію для вивчення питання уніфікації номенклатури елементарної математики.

В доповіді *Васильєва* (Ленінград) малося на оці дати міркування про можливість запровадження елементів математичної філософії до програм середньої школи.

Доповідь *Marcolongo* про стан видання рукописів Леонардо да Вінчі.

Rychlik (Прага) дав відомости за один рукопис славетного математика Bolzano з року 1830, де між иншим наведено приклад суцільної функції, що не має похідної; тим часом вважалося досі, що перший такий приклад, і то значно пізніше, дав Weirestrass.

Перебування в Парижі

Од недовгого перебування в Парижі я не сподівався великих наслідків, бо літня мертва пора в академічнім та науковім житті там триває до самого кінця жовтня. Лекції в Сорбоні починаються 3 листопада, в Collège de France у грудні. Тому перші часи перебування в Парижі я витратив на читання наукової літератури, одвідини засідань Паризької Академії Наук (Académie des Sciences), технічного музею (Conservatoire des Arts et Métiers) та ознайомлення з де-чим із величезних мистецьких багацтв та історичних памяток міста й околиць.

Засідання Академії Наук вражають страшеним неладом. Зразу здається, що доповідача ніхто не слухає: всі ходять, розмовляють, сміються. Проте кожна доповідь збирає кількох уважних зацікавлених слухачів, і майже всі доповіді, так власних дослідів академіків, як і заміток сторонніх осіб, переданих академикам, бувають, хоч і короткі, але дуже змістовні.

Інститут (Institut de France), вища наукова установа Франції, міститься в старому палаці Мазаріні, де кожна з його пятьох складових частин — Академій має своє приміщення для звичайних засідань. Академія Наук засідає в прохідній кімнаті — перед салею засідань Французької Академії (Académie Française).

Обєднані урочисті річні засідання пятьох Академій бувають прилюдні. Крім президента, що доповідає за зміни в особистім складі Інституту та подає короткі характеристики померлих академіків, промовляють представники поодиноких Академій на темі зі своїх фахів, але розроблені досить популярно.

24 жовтня відбулося перше по літній перерві засідання Товариства Société de Mathématique de France, де я доповів «Про одно застосування теореми Sturm'a» (Sur une application du théorème de Sturm) перед досить численною авдиторією, у присутності акад. М. Крилова, професорів Лузина, Montel'a, Chazy, Vergne та инш. Її буде надруковано в журналі Товариства Bulletin de la Société Mathématique de France. У цій розвідці показано, як застосувати теорему Sturm'a про корені алгебричних рівнань до полюсів мероморфних функцій.

Відвідини Математичного Товариства Франції дали мені нагоду особисто познайомитися з деким із французьких математиків, зосібна з професором Chazy, секретарем Товариства, з академіком Hadamard'ом, що з ним я вже давніше познайомився заочно, подаючи до Паризької Академії мої замітки для надрукування в Comptes rendus.

На жаль, я не дочекався початку лекцій у Сорбонні, де мене між иншим цікавили виклади професора Montel'a з теорії аналітичних функцій і де-які инші, та диспутів де-кількох докторантів-математиків, що були призначені на першу половину листопада. Був лише на обороні одної дисертації з експериментальної фізики під головуванням M-me Curie. Опоненти обмежувалися самими запитаннями (але досить уїдливими), по змісту дисертації, а також, на тему дану від факультету; диспут тривав за малим дві годині. Загалом він мені видався досить подібним до наших докторських диспутів.

На прохання паризької газети «Українські вісти», я дав огляд «Математична наука на Україні за десятиріччя 1918–1928», що з'явився в № 76 цеї газети, та де-які інформації за моє перебування на Конґресі та в Парижі.

За три тижні до виїзду з Парижу, звязавшися листовно з Головою мат.-прир.-лік. Секції Львівського Наукового Т-ва та довідавшися, що на 4.XI призначено святкування ювілею Голови Товариства акад. Студинського, я вирішив просити в польському консуляті візи на вїзд до Львова. Відвідини Львова мали для мене потрійний інтерес. По-перше, працюючи ще зі студентських часів, а особливо з 1917-го року над продовженням та розвитком у нас галицько-українських наукових, мовних та педагогічних надбань у обсягу математики, друкуючи в галицьких наукових виданнях свої праці, як і праці галицьких учених — у нас, я мав досить широкі листові знайомості і хотів їх скріпити особистими побаченнями. По-друге, я мав намір зробити в Львівськім Науковім Товаристві наукову доповідь, а також звітну доповідь за Конґрес, де я репрезентував Товариство. Потретє, я хотів побувати на святі Голови Товариства і має сказати кілька слів привітання від наших учених, знаючи, що може делегатам з Радянської України не вдасться дістатися до Львова.

Не вважаючи на попередні обіцянки, мені візи не дано. Тоді я рукопис своєї доповіди «Про одну задачу на мінімум» (Sur un problème de minimum) вислав на адресу Д-ра В. Левицького, і вже дома дістав від нього повідомлення, що він її доповість і надрукує в Sitzungsbericht'ах математ.-прир.-лік. секції Товариства. В цій замітці доведено теорему:

Коли функція $\varphi(x)$ росте та є опукла $A_1 < A_2 < \ldots < A_n$, то сума

$$[\varphi(A_2 - A_1) + \ldots + \varphi(A_n - A_{n-1})] + [\varphi(A_3 - A_1) + \varphi(A_4 - A_2) + \ldots]$$

є мінімум усіх сум типу

$$\varphi\left(\left|A_{\alpha_2} - A_{\alpha_1}\right|\right) + \ldots + \left(\left|A_{\alpha_n} - A_{\alpha_{n-1}}\right|\right) + \varphi\left(\left|A_{\alpha_1} - A_{\alpha_n}\right|\right).$$

З Парижу я виїхав 31.X і без особливих пригод дістався додому.

За час відрядження я надрукував оці розвідки та замітки:

1) Про спосіб найменших квадратів та спосіб моментів у теорії наближеної інтеґрації диференціяльних рівнань (Вісті КПІ, 1928).

2) Про похідні від наближених інтеґралів де-яких диференціяльних рівнань (там само).

3) Sur la convergence de quelques procèdes de l'intégration approchée de équations différentielles (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 187).

4) Замітка про існування кореня в алґебричного рівнання (Записки Київського І.Н.О., т. III).

5) Про збіжність де-яких ланцюгових (ступанкових) дробів (Збірник мат.-прир.-лік. секції Н. Т-ва ім. Шевченка, 1929).

6) Замітка про контурні інтеґрали (так само).

Виготовив і віддав до друку, крім згадуваних вище трьох доповідей та розвідки до Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, працю:

7) Алґебричні студії над аналітичними функціями (Труди ВУАН, т. XII, вип. I), і дістав премію за свої давніші праці.

Де-які подробиці наукового та побутового характеру, враження та порівнання було подано на засіданні мого семінару при Інституті Народньої Освіти, перед ширшим загалом студентів Інститута в Педаґоґічнім Товаристві при Всеукраїнській Академії Наук.

Перемогу над основними труднощами цього відрядження я завдячую Ректорові Київського Інституту Народньої Освіти *С. Семкові* та Уповноваженому Укрнауки в Київі *Л. Левитському*. Прошу їх прийняти мою щиру подяку.

24. XI. 1928.

ПРОМОВА АКАД. М. КРАВЧУКА НА ВРОЧИСТОМУ ЗАСІДАННІ КИЇВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ 6/XI 1929 Р.*

Всеукраїнська Академія Наук виступав на святкуванні 12-ої річниці Жовтневої Революції з почуттям особливого морального завдоволення.

Сьогодні більше, ніж коли, вона може сказати, що її завдання останнього року виконано великою мірою, що праця на найближчі наступні роки плянується певно й реально, послідовно додержуючи основної мати творення української радянської культури та соціялістичної перебудові держави.

Що більше в непам'ять ідуть покручені стежки перших років революції на Україні, то певніше виявляється революційна істота Академії, цього витвору велетенського революційного зрушення. Об'єктивно бо доля Академії завсіди залежала від долі революції на Україні, і всякий повороті до реакції ставив питання: бути чи не бути Українській Академії Наук?

Переживши разом з усією країною довгий та складний революційний процес, Академія кінець-кінцем свідомо й міцно зв'язала свою долю з долею Української, Радянської Республіки та всього Радянського Союзу, знайшла належне і відповідальне місце в організмі держави робітників і селян.

Почавши з плекання пригнобленої української національної культури, доходячи великих наслідків на цьому полі, Академія, надто останніми часами, поширює коло своєї діяльности на актуальні питання марксівської філософії, техніки, народнього здоров'я, промислового будівництва, плянування соціялістичного господарства та інші. Зосібна всі важливі заходи щодо індустріяльного розвитку Києва та Київщини не перебуваються без проводу або найближчої участи Академії.

---

* Вісті ВУАН. — 1929 —№ 9–10. — С. 22–24.

Внутрішнє життя Академії швидким темпом раціоналізується. Кошторис з року на рік значно зростає (перейшов минулого року за мільйон карб., а на цей рік спроектований мало не на 1½ мільйона).

Розробляються деталі п’ятирічного пляну розвитку Академії. До найближчої сесії Ради ВУАН закінчується розробка принципів нового статуту, що має оформити фактично вже чималою мірою переведену внутрішню демократизацію Академії з висуненням активу молодших наукових робітників на належне місце в справах адміністрування та організації наукової праці.

ВУАН викликає на соціалістичне змагання Білоруську і Всесоюзну Академії.

Не можна кількома словами з’ясувати значіння пам’ятної всім найважливішої події цього року в житті Академії — поповнення її складу новими кадрами цінних наукових та організаційних сил через дообрання 34 академіків. Пильна та прихильна громадська увага до Академії, що в цей відповідальний момент виявилася особливо яскраво, глибоке моральне завдоволення учасників цього важливого акту, і наслідки обрання — досить промовляють за себе.

Увага до ВУАН широких громадських кіл, надто робітництва взагалі і Донбасу зокрема — один з найефективніших стимулів розвитку й поліпшення роботи Академії. Тут і особливо треба відзначити масові приїзди до Академії донбасівського робітництва під час травневих екскурсій цього року, шефство ВУАН над робітничою Сталінщиною, участь сталінського робітництва та широких громадських кіл у виборах нових академіків і невпинне піклування Академією Київської Міської Ради.

Відколи Міська Рада на 10-ті роковини Жовтневої Революції передала Академії для потреб Фізично-Математичного Відділу новий великий будинок, і коли скептики запевняли, що Академія не зможе його використати,— зминуло тільки, два роки. І от ми перед гострою кризою щодо приміщень для наукових установ Академії; доводиться ущільнюватися, поширюватися на підвальні приміщення; ляборатορії буквально розпирають свої стіни, заяви нових академіків на приміщення для їхніх наукових установ лишаються без наслідків, і Академія знов примушена вдатися по допомогу до ОВК та Міської Ради, сподіваючися ще раз на прихильне зрозуміння потреб української радянської науки.

Цього року Раднарком Союзу Радянських Республік, приділивши Академії 700.000 крб. на зміцнення та поширення праці в зв'язку з святкуванням її юбілею в травні 1930 року, відзначив заслуги ВУАН усесоюзного значіння. Цю честь Академія повинна розділити з пролетарською громадськістю, що так щиро нею опікувалася.

Академія не заплющує очей на неґативні явища в своєму житті. Вони болять надто і працівників Академії і свідому громадськість, але ми певні, що ці хиби є чималою мірою ніби природна хороба зростання молодого організму, і працюємо, щоб їх позбутися.

Академія йде під проводом Комуністичної Партії разом із трудовими масами, працює на їхню користь, і разом із ними в сьогоднішній день великих споминів вітає гаслом єднання науки й праці, соціальної та національної справедливості й боротьби за ідеал соціалізму.

ПРИВІТАННЯ XV ПАРТКОНФЕРЕНЦІЇ КИЇВЩИНИ ВІД ГОЛОВИ СНР АК. КРАВЧУКА ВІД ІМ. НАУКОВИХ РОБІТНИКІВ *

Від імени делегації Всеукраїнської Академії Наук та наукових робітників Київщини конференцію вітає т. Кравчук.

— Окружна партійна конференція,— каже тов. Кравчук,— збирається в надзвичайно відповідальний і важливий момент процесу соціялістичної перебудови Радянського Союзу. Ми, наукові робітники Київщини, можемо сміливо сказати, що й на нашій ділянці роботи, серед нас самих, цей процес розгортається на всю широчінь.

Тов. Кравчук розповідає про професійну та громадську роботу наукових сил Київщини, які брали участь в різних кампаніях, що їх провадила партія.

— Як наслідок запровадження соціялістичного змагання,— каже т. Кравчук,— ми маємо великі результати в готуванні кадрів до ВИШ'ів, в справі поліпшення роботи з нашою науковою зміною, аспірантами тощо. Ми спромоглися зрушити та захопити широкі маси наукових робітників, які до недавнього часу трималися на надто вузькому колі активу.

— Не можна обминути творчої роботи ВУАН, роботи, що розпочалася саме на початку п'ятилітки під проводом незабутнього академіка Заболотного. З установи, не раз ворожої заходам радянської влади та комуністичної партії, з установи, яка була відірвана від життя та малоавторитетна, ВУАН почала перетворюватися на важливий орган, що творить українську соціялістичну культуру.

Далі тов. Кравчук каже про поповнення кадрів академіків у 1929 році, про організацію комуністичного осередку ВУАН, що набув великого авторитету й розгорнув широку діяльність, розповідає про велику

---

* Бюлетень київської секції наукових працівників. — 1929. — С. 6–7.

працю над запровадженням нової структури, нового статуту ВУАН, що має її наблизити до пекучих завдань сучасності).

— Одночасно ми відзначаємо, що наші темпи в деяких ділянках роботи відстають від сучасного життя. Обслідування констатувало недостатню увагу щодо готування кадрів, несучасність наукові тематики та хиби метод наукової роботи. Ми маємо подекуди наявність негативних виступів, нехтування актуальних політичних гасел та директив щодо колективізації, ба навіть спробу організованої контрреволюції, що виявив процес «СВУ».

— Як один із об'єктивних показників наших успіхів, ми не можемо обминути брязкотіння зброєю й словесні буфонади, які знову чуємо з-за кордону. Ми бачимо нові загравання з українськими колами, маємо проект утворення нової української васальної держави під польським протекторатом. Це якнайкраще доводить, що українська радянська державність зростає, міцніє, що наші реконструктивні досягнення дають їй блискучі, а білій Польщі небезпечні перспективи. За десять років, що минули від часу навали польської шляхти, ми маємо розквіт українського шкільництва, маємо 18.000 шкіл, що провадять навчання українською мовою, маємо 38 інститутів, де вчиться 48.000 студентів; на кінець п'ятилітки матимемо 140.000 студентів.

— Тираж періодичних видань на Київщині становить 285.000, стільки, скільки на всій Західній Україні. Натомість за Волинсько-Подільським кордоном бачимо масове закриття українських шкіл. З 3.600 залишилося 760. Там ми бачимо нездійснені обіцянки відкрити український університет та й то у Варшаві, бачимо занепад сільського господарства, колонізацію українських земель польською вояччиною, масову еміграцію української людности в Південну Америку. Нарешті, ми бачимо там занепад і без того нечисленних наукових установ.

— Палко вітаючи XV партійну конференцію Київщини, Київська секція наукових робітників, Всеукраїнська Академія Наук, наукові установи та вищі школи Києва приносять свої знання, силу й волю на здійснення реконструктивних завдань, що їх накреслила й провадить в життя комуністична партія й радянська влада.

ВПЛИВ ЕЙЛЕРА НА ДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК МАТЕМАТИКИ*

Вступ

[1]Ейлерове життя і робота† цілком належать до періоду, коли культура й зокрема наука передових капіталістичних країн Европи збирали багатий урожай з наслідків блискучої доби «бурі натиску» філософської, наукової та технічної думки XVII ст.

Математика XVIII ст. розвивалася в атмосфері свіжого впливу геніїв Декарта, Паскаля, Фермата, Гюйгенса, Ньютона, Лейбніца. Їх математичний доробок накреслив неписаний план для роботи кількох наступних поколінь математиків.

Всі вони, а особливо Лейбніц, революціонізували наукову думку, намагаючись вирвати її з обіймів античної традиції, що явно заважала вже тоді дальшому прогресові математики. Правда, над ними самими ця традиція ще явно тяжіла, може, найбільше над Ньютоном. Але вже для людей Ейлерового покоління авторитет титанів математичної думки попереднього століття затьмив давніх грецьких учених, почавши нову наукову традицію, що протривала всю решту часу життя — розвитку й занепаду — капіталістичного світу.

Ейлер — один з найгеніальніших, а разом і досить типових представників цієї нової традиції. Генієм — він не менший за велетнів XVII ст.[2]; але інша доба — час накопичування засобів і сил для останнього бою, що його готувала буржуазна Европа проти решток феодалізму, час удосконалення наукової та технічної зброї, запланованого попереднім століттям — утворили з нього вченою іншого типу. Замість революціонізму в філософському світогляді і наукових ідеях — консер-

---

* 1. К.: Вид-во ВУАН, 1935. — 45 с.

2. Михайло Кравчук. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — НТУУ «КПІ», 2000. — 232 с.

Числові виноски зроблено для цитування у статті «Михайло Кравчук як історик математики».

† Народ. 1707 р., помер 1783 р.

ватизм соціально-політичних і філософських поглядів і пієтет перед авторитетом учителів. Замість тенденції до творення загальних настановних принципів і універсальних теорій — рішучий нахил до розробки конкретних задач і до обгрунтування сміливих наукових здогадів революційної доби науки. Замість невеликої об'ємом, але неймовірної сміливістю, концентрацію та багатством думки продукції основоположників нової ери в науці — колосальний феєрверк, навала десятків томів праць, буйна широка ріка наукової думки, звільненої потужним натиском доби великих попередників|

Ми не знаємо в Ейлеровім житті ні одного значнішого факта, що мав би громадсько-політичне значення. Уся його сила волі, неймовірна працездатність, темперамент — пішли на одне діло, що заповнювало його цілком — на наукову творчість.

Поза цим він був людиною середньою, що задовольнялася з низько пробної ходової, подеколи, може, вульгарної філософії тодішнього буржуазного загалу, не виходила поза межі релігійної традиції і побутових чеснот сучасного йому міщанства. Натомість у науковій роботі було зосереджено ввесь запал, увесь героїзм його натури. Він тричі тратив зір від напруженої праці. Абсолютно сліпий, він ретельно опрацьовував теорію телескопів і мікроскопів, що тепер уже для нього особисто були хіба малою втіхою гіркого жалю. Ніякі родинні драми, ніякі побутові прикрості не ламали в ньому волі до наукової роботи. Хоч летом своєї наукової думки Ейлер далеко випереджав сучасників, хоч його глибші ідеї чекали визнання наступних поколінь, але така була безпосередньо очевидна сила цього генія, що він тішився загальною пошаною і незаперечним величезним авторитетом та славою на протязі всього життя. Петербурзька Академія Наук найкраще це висловила ляпідарним написом на його надгробку:

Leonhardo Eulero Akademia Petropolitana

Пієтет перед самим іменем Ейлера задержався незмінно в наступних поколіннях математиків. Коли один з Ейлерових нащадків, уже в XX ст., бувши студентом Петербурзького гірничого інституту, по кількаразових невдалих спробах не зміг скласти іспиту з математики, то небіжчик проф. Довбня запропонував йому: «Пане Ейлере, запишіть собі самі «незадовільно»; у мене рука не піднімається дати «незадовільно» особі, що носить таке славетне прізвище»*.

Ніхто з великих математиків останніх двох століть не перевищив Ейлера ні посмертною славою, ані популярністю серед сучасників. Такі великі математичні таланти, як Чебишов, Ляпунов, відомі в СРСР тільки людям з фаховою математичною освітою; а ім'я Вороного, чиї математичні ідеї визнаються за геніальні, навіть математики України знають дуже мало, хоч його можна вважати за нашого сучасника.

Ейлерова слава й популярність є наслідок не тільки незрівняної сили його генія. До них спричинилася надзвичайна ширина його засягу в науці; трудно вказати таку ділянку математичних наук, де б він не утворив нової галузі або могутньо не посунув наперед її розвиток. Цей, за висловом д'Аламбера, «диявол у людській подобі», натворив за своє життя (при тім довгі роки в сліпому стані) більше, аніж за цей час середня людина могла б просто списати. На протязі півсотні літ по його смерті Петербурзька Академія видавала його рукописи і ще останніми часами брошурувала й випускала в світ його книги, надруковані на початку XIX століття.

Нарешті, своєю популярністю серед сучасників Ейлер великою мірою завдячує майстерному вмінню застосовувати математику в прикладних обсягах і надзвичайним здібностям популяризатора. Він дав високі зразки математичної розробки теорії корабля, балістики, теорії руху місяця, теорії оптичних приладів, теорії турбін, різних конструктивних проблем.

З його іменем зв'язані основоположні виклади великих курсів аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення, механіки, алгебри тощо, які й до цього часу заховали свій вплив на систему й стиль університетських викладів та підручної літератури.

I. Поняття функції

Поняття змінної величини і функціональної залежності здобув Ейлер від великих учителів XVII ст., як основу нового наукового світогляду і як основні загальні об'єкти математичного дослідження. Але він, як і його попередники, ще був далеко від того загального розуміння функціональної залежності, як однозначної відповідності значень одного змінного значенням другого, що його висунуло XIX ст., розуміння цілком абстракт-

* Оповідання свідка цієї події акад. М. Крилова, що тоді був студентом Гірничого інституту.

ного, не конструктивного, не зв'язаного з конкретними математичними операціями. Ейлер дає таке означення функції:

*«Функція змінної величини є аналітичний вираз, складений будьяким способом з цієї величини і з чисел, тобто з величин сталих»**.

Означення це з погляду сучасних вимог дуже непевне, бо неясно: що таке «аналітичний вираз». Пояснення до нього означення справляють враження, що мова йде про алгебричні вирази. Але класифікація функцій, яку дає Ейлер одною сторінкою далі, згадує й про функції трансцендентні, як утворені за допомогою не самих алгебричних, а й *трансцендентних* (хоч не сказано, яких саме) операцій. Ці неясності вдається з'ясувати за допомогою інших місць Ейлерового тексту†.

Подаючи ряд простих засобів уніформізації ірраціональних алгебричних функцій і розвинених в степеневі ради дробових раціональних функцій, він приходить до такої думки: «... ясно, що *неціла* (алгебрична — М. К.) функція від z не може бути подана через скінченну кількість членів вигляду:

$$A + Bz + Cz^2 + \text{etc} \ldots,$$

бо коли б це могло бути, вона тим самим була б цілою функцією (многочленом —М. К.); а [2]коли б хтось не був певен, чи можна її подати таким рядом із нескінченної кількості членів, то саме розвинені кожної функції позбавить його всякого сумніву; проте, для більшої загальності, крім степенів z, що мають додатні й цілі покажчики, слід припустити довільні степені. Так цілком позбудемося сумніву, чи всяка функція від z може бути перетворена в нескінченний ряд форми:

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta},$$

де покажчики є будьякі числа».[4]

Це твердження здається неправильним, а його обгрунтовання до комізму наївним. Проте в ньому, справді, виявляється глибока думка, велика математична обережність і доцільність: бо майже ввесь математичний доробок Ейлера та його доби не виходить поза рамки такого означення функцій. Справді, асортимент математичних виразів, які тоді розглядали обмежувався функціями алгебричними, елементарними трансцендентними та інтегралами від них, що за нашою сучас-

* Introductio in Analysin Infinitorum, т. I, розд. 1. Далі цитуватимемо цю книгу, як Introductio.

† Див. особливо: Introductio, т. I, розд. 3 та 4.

ною термінологією є аналітичні і можуть бути розвинені в степеневі ряди в околиці точки

$$z = 0,$$

якщо ця точка є регулярна. Коли ж вона не регулярна, то для зазначеної категорії функцій вона може бути або полюсом, або істотно особливою точкою, або точкою розгалуження скінченної кратності, або, нарешті, логарифмічною особливістю. Ейлерове твердження якраз обіймає перші три випадки особливостей; щодо четвертого, то може здатися, що у нього стався недогляд і що він мусів урахувати ще можливість члена типу $A \log z$. Справді ж цей пропуск виправдується тим, що, за почином Кеплера й Кавалієрі і за санкцією Лейбніцового авторитету, ще в Ейлерові часи (та й пізніше) мала право громадянства в науці трактовка нескінченно малих в розумінні *актуальної* нескінченності. Сам Ейлер розумів, що цю актуальність слід приймати лише умовно і уникав дуже майстерно помилок, що мусіли виникати з такої трактовки. Але, згідно з тодішньою термінологією та знакоположенням, уникаючи слова «границя» він писав, що

$$\ln x = \int_0^x \frac{dx}{x^{1+i}} = \frac{x^i - 1}{i}, \text{ або } = \frac{x^0 - 1}{0},$$

де i — нескінченно мале число. Тепер зрозуміло, що Ейлерове універсальне представлення функцій у вигляді степеневого ряду з довільними покажчиками степеня цілком відповідає його концепції функції.

Слід зауважити, що незалежне змінне у Ейлера раз-у-раз, як відомо є комплексна величина. З повним правом можемо назвати його першим творцем теорії аналітичних функцій — в розумінні функцій алгебричних та їх інтегралів і обернень тих інтегралів. Розуміється, йому неясні були питання про обсяг, існування функцій і про особливості функцій. Особливо трудна проблема многозначності, труднощі якої він трактує, між іншим, на прикладі ірраціонального покажчика степеня, розуміється, залишилася в Ейлера навіть без належної постави і знайшла відповідь тільки в працях Коші, Рімана та Вееpштрасса.

Ейлер глибоко розумів, що його поняття функції мало б невелику ціну, коли б воно не справджувало принципу композиції, тобто правила:

Функція від функції змінного z є теж функція змінного z.

Іншими словами, він мусів бути певен, що сума типу

$$\sum_i \mathfrak{A}_i (A_i z^{\alpha_i} + B_i z^{\beta_i} + \ldots)^{\mathfrak{v}_i}$$

перетворюється на суму вигляду

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + ...$$

Для нас, через використання апарату Тейлорового і Лоранового рядів, довід цього твердження в обсягу Ейлерового поняття функції не являє труднощів, коли обминути питання збіжності, які не дуже бентежили математиків XVIII ст., в тому числі і Ейлера. Правда, уже і в Ейлерові часи Тейлорів ряд фігурував як досить звичайний апарат математичного досліду. Ейлер сам його використовує — переважно, проте, як апарат для *ефективних* числових підрахунків. Річ у тім, що хоч у ті часи була вже відомі й Роллева теорема — проте, і вона і Тейлорів ряд були лише здогадами, які в ті часи не могла бути доведені і навіть проблема доводу їх не могла бути чітко сформульована. Справді, для цього треба було мати сучасне розуміння неперервності функції, яке дав Коші, і Веєрштрассову теорему про максимум і мінімум неперервної функції на даному інтервалі, або теорему про існування інтеграла, хоча б в обмеженій формульовці. Хоч одно, хоч друге дало б змогу знайти остачу Тейлорової формули і таким чином виправдати її вжиток. Думається, що Ейлер не тільки не хотів скористуватися в непевного в ті часи Тейлорового ряду для встановлення такого основоположного поняття як функція, не тільки здавалося йому протинатуральним і навіть нелогічним користуватися з похідних у виробленні цього основного поняття, але він почував також, що ці засоби *занадто загальні* для його мети.

Натомість вій скористувався з Ньютонової *біноміальної формули* для довільного покажчика, що становить взагалі основний пункт у всій побудові першої частини його Introduction in Analysin Infinitorum — одної з найгеніальніших книг світової математичної літератури. Він подає цю формулу в розд. 4 зазначеної книги (§ 70 і наступні).

Знаючи добре, що від цієї формули залежать і доля його означення функції, і доля його блискучої теорії елементарних трансцендентних — головної перлини цього твору,— він, проте, в час написання цієї книги, очевидно, не володів повним доводом Ньютонової формули, як не мав його і сам Ньютон. Натомість на той час був уже величезний конкретний матеріал, що потверджував її справедливість. Не було тоді в математичному світі сумнівів щодо цього твердження — в той час, як ще не звикло скептичне ставлення до основ аналізу нескінченно малих. Отже в своєму виборі за основу для Introductio саме біноміальної формули Ейлер керувався, очевидно, також міркуваннями подібними до тих, що змусили Ньютона викласти свої «Математичні основи натуральної філософії без допомоги методу флюксій».

Пізніше не раз Ейлер вертається до нього (серед небагатьох інших) слабого місця свого геніального твору і дає цілком правильно основну ідею доводу Ньютонової формули, що базується на встановленні теореми додавання:

$$\varphi(m+n,x)=\varphi(m,x)\varphi(n,x)$$

для функції

$$\varphi(m,x)=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\dots$$

Цю ідею пізніше систематично провів Абель у своєму класичному мемуарі про Ньютонів ряд.

Друге принципіальне питання, яке мало цікавить Ейлера в зв'язку з його означенням функції, було питання про *однозначність* її аналітичного представлення.

Для випадку, коли покажчики α, β, γ — всі цілі додатні, він дає довід цього твердження; для загального випадку він такого питання не ставить, але нетрудно показати, що й тут відповідь має бути позитивна, якщо бодай множина чисел $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ не має безлічі точок скупчення.

Нарешті, спинімося ще трохи на сміливому твердженні Ейлера, що всяке рівняння

$$f(z)=\mathrm{const}$$

має (дійсний або комплексний) корінь*. Ні доводу, ані солідної аргументації на користь цього твердження він не дає, і з нашого погляду воно, розуміється, помилкове, як показує рівняння

$$e^z=0,$$

що мало б бути добре відоме Ейлерові — творцеві повної теорії елементарних трансцендентних функцій. Немає, розуміється, сумніву, що наступна аргументація була йому невідома, але курйозно, що й тут справа розв'язується на його користь.

Справді, коли ліва сторона нашого рівняння може бути зведена на однозначну функцію, то через те, що вона аналітична, до неї можна застосувати Веєрштрассову теорему, що

$$\lim f(z_i)=C,$$

* Introductio, т. I, розд. 1, § 5.

коли z_i перебігає ряд відповідно дібраних значень:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

В стилі запису Ейлерових часів остання рівність виглядає так: існує рівність

$$f(z) = C + \omega,$$

де ω — нескінченно мале, тобто за Ейлеровим записом

$$\omega = 0.$$

При обгрунтуванні аналізу нескінченно малих — у XVIII ст. основне значення видатні автори приписували аналітичній формі загальної функції. Відома Лагранжова спроба — обійтися в побудові основ аналізу без понять нескінченності й неперервності, що лишалися неясними до робіт Коші, Веєрштрасса та Кантора — цілком базується на тому Ейлеровому (обмеженому) понятті функції, що ми його з'ясували на попередніх сторінках.

Ця спроба є перший могутній відгомін Ейлерової концепції функції. Як дальший розвиток цієї ідеї, йде розвиток загальної теорії функцій *комплексного змінного* взагалі (Гаусс, Коші, Веєрштрасс) і дальше поглиблення теорії алгебричних функцій та їх інтегралів (Гаусс, Абель, Ріман). Щодо цього другого, конкретнішого напрямку, то про роль Ейлера в його розвитку далі буде сказано докладніше.

Зауважмо вкінці, що славетна проблема струни, висунена ще за Ейлерових часів, поставила питання про ту загальну концепцію функції, яку загально визнано вже в XIX ст. після робіт Фур'є та Лежен-Діріхле про представлення «довільних функцій» тригонометричними рядами. Вона активізувала інтерес до загальних питань про неперервність, про існування похідних і дала кінець-кінцем Веєрштрассове обгрунтовання диференціального та інтегрального числення в обсягу функцій дійсного змінного. На цю лінію розвитку математики Ейлерова діяльність мала значно менший вплив.

II. Теорія експоненціальної та логарифмічної функцій

«Хоч наука про трансцендентні функції повинна бути одним із предметів інтегрального числення,— пише Ейлер,— проте, буде до речі розібрати кілька видів, що трапляються частіше і що торують дорогу для різних дослідів»*. Цим він порушує традиції попереднього

* Introductio, т. I, § 96.

сторіччя, де нові трансцендентні — логарифми та кругові функції — з'являлися в наслідок намагання знайти квадратури і ректифікації різних алгебричних кривих — насамперед, кола та гіперболи. Ці трансцендентні та їх обернення (експоненціальні та тригонометричні функції) настільки ввійшли в загальний ужиток математиків, що вже можна було трактувати їх самостійно — цілком елементарними засобами. Тут Ейлер ступив на той шлях, який пізніше повторили математики XIX ст. (Ерміт, Веєрштрасс) з еліптичними функціями, збудувавши також наново їх теорію, незалежну від еліптичних інтегралів, тобто перервавши для цих нових трансцендентних Ейлерову традицію, так само, як для елементарних трансцендентних Ейлер перервав традицію Фермата, Паскаля, Меркатора та інших. Розуміється, він був у силі розробити свою теорію і на шляху основоположників попереднього сторіччя. Але в Introductio in Analysin Infinitorum не мало бути місця новим операціям математики — диференціюванню та інтегруванню, бо, як говорить Ейлер, люди, що бралися за його часів до вивчення аналізу нескінченно малих, «бувають змушені спинитися на перших кроках і виробляють собі неправильні думки про нескінченність, що її правильне розуміння повинно ними керувати в їх роботі і в предметі їх досліджень»,... «я розв'язав достатню кількість питань, що дадуть читачам змогу непомітно і до певної міри проти їх сподіванки оббутися з ідеєю нескінченного. Я також виклав методами звичайної алгебри кілька питань, що являють собою звичайно предмет аналізу нескінченно малих, щоб подати реальніше й рельєфніше повну згоду, що виявиться далі між обома методами*.

Труднощі щодо ідеї нескінченного, розуміється, лежали насамперед в загальній концепції функціональної залежності та в ідеї граничного переходу — основної і власне єдино нової операції аналізу. Завдання Introductio були: 1) на научних і важливих прикладах з'ясувати ідею функції і дати засоби її наочного представлення (способом координат), 2) на конкретних, але важливих прикладах навчити правильно і ефективно застосовувати граничні переходи, виробити правильне чуття таких переходів, що притуплялося через метафізичну або вульгарну трактовку нескінченно малого й нескінченно великого в образах актуальних нескінченно малих — таких як:

$$dx = 0$$

* Introductio, т. I, Передмова.

і актуальних нескінченно великих, як:

$$\frac{1}{0} = \infty.$$

Але для пізніших поколінь, для математиків XIX ст., коли труднощі з обгрунтуванням аналізу нескінченно малих стали перейденим етапом, велику роль відіграла не ця пропедевтична мета, а та майстерна, глибока, перспективна трактовка елементарних трансцендентних функцій, що дана в розд. VI і в дальших розділах I тому Introductio in Analysin Infinitorum, цього першого й геніального трактату з теорії функцій комплексного змінного, блискучого феєрверку оригінальних думок і плідних настанов. Сам Ейлер добре почував значення своєї книги. Він пише: «...багатства матеріалу вистачило б на кілька томів; але наскільки можна було, я хотів бути стислим — не перестаючи, проте, бути зрозумілим,— щоб лишити для роботи читача ширше поле, де б він міг вправлятися і розсувати межі аналізу. Бо я не боюся заповісти, що поза новими речами, які міститься в цій книзі, так буде знайдено джерела, щоб почерпнути ще велике число чудових відкриттів»*.

Це пророцтво блискуче справдилося. Особливо ефектні й важливі для історії науки три першорядні роботи математиків XIX ст., зроблені під впливом і в напрямі безпосереднього розвитку ідей першого тому Introductio:

1. «Нові основи теорії еліптичних функцій»† Якобі, де повну теорію цих нових трансцендентних розвинено майже цілком за планом Ейлерової трактовки елементарних трансцендентних функцій (1829).

2. Блискучий довід, що його дав Лежен-Діріхле‡ теоремі про існування безлічі первісних чисел у всякій арифметичній прогресії: $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$, де a та b є цілі взаємно прості числа (1837).

3. Асимптотична формула, що дає наближено кількість $\varphi(x)$ первісних чисел у натуральному ряді

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

в межах від 1 до x, подана в книзі Чебишова «Теория сравнений» (1849); вона має такий вигляд*

* Introductio, т. I, Передмова.

† Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, 1829.

‡ Lejeune-Dirichlet, Werke.

$$\varphi(x) \sim \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$$

Спинімося докладніше на тих Ейлерових результатах, що надихнули Якобі на одно з найбільших математичних відкриттів XIX ст. — відкриття еліптичних функцій, на глибоке вивчення їх властивостей і на способи їх ефективного обчислення.

Основна Ейлерова ідея — утворювати трансцендентні функції граничним переходом з алгебричних. Вона являє собою перший крок у сучасному принципі класифікації функцій, що її в недавніх часах запропонував французький математик Бер. Наскільки цей шлях загальний — стало можливо збагнути тільки по яких 150 роках, коли Веєрштрасс довів, що всяку неперервну на даному інтервалі функцію можна подати як границю многочлена.

Скорочуючи, узагальнюючи і пристосовуючи до сучасних зазначень хід Ейлерових думок, можемо його подати так:

Біноміальне розвинення

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1+\frac{nz}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{z^n}{n^2}+...$$

показує, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+...$$

при довільному z — навіть комплексному. Отже зокрема існує границя виразу $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, що дорівнює

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...$$

Далі, застосування загальної біноміальної формули для дійсного z (Ньютонової формули) дає:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nz} = 1+\frac{nz}{n}+\frac{nz(nz-1)}{2!\,n^2}+...$$

[*] Див. також: П. Л. Чебишев, Сочинения, т. I, с. 29. — Остаточне математичне обгрунтування цій формулі у вигляді $\varphi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ дав сучасний французький математик Ж. Адамар.

Звідси:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nz} = 1+\frac{nz}{n}+\frac{nz(nz-1)}{2!\,n^2}+...,$$

тобто

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+...$$

Отже останній ряд для діленого z є експоненціальна функція e^z. Для будьякого (комплексного) z беремо суму цього ряду *за означення* експоненціальної функції e^z для комплексного аргумента, здійснивши таким чином те, що з часів Веєрштрасса математики називають аналітичним продовженням функції.

В даному разі здійснено аналітичне продовження експоненціальної функції з дійсних значень аргумента z на будьякі комплексні.

Тепер бачимо, що в рівності

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = 1+y$$

число x є натуральний логарифм числа $1+y$, отже, вживаючи тодішніх зазначень (що актуалізували нескінченність), виходить:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = 1+y \qquad (n=\infty)$$

$$\ln(1+y) = x = \frac{(1+y)^{1/n}-1}{1/n}$$

Застосовуючи тут знов Ньютонову формулу, маємо:

$$\ln(1+y) = y + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2!\,\frac{1}{n}}y^2 + ... \qquad (n=\infty)$$

або остаточно:

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-...$$

Цей ряд знов можна взяти як загальне означення логарифма в комплексному обсягу. Але він збігається тільки в колі радіуса 1, а для більших абсолютних значень y-а — розбігається, про що говорить і сам Ейлер.

Проте, він вважав, що й *розбіжні ряди цілком придатні для загальних дослідів над функціями, і дають явно непридатні результати тільки для конкретних обчислень значень функції.*

Ця Ейлерова ідея — використання розбіжних рядів — одна з небагатьох, що замість визнання — зустріла в наступних поколінь математиків — рішучий опір, як абсолютно хибна. Коші ввів точне поняття збіжності ряду, що задержалося в математиці й досі, і до розбіжних рядів почали ставитися, як до беззмістовних утворів, що їх треба особливо остерігатися. Тільки дальший розвиток математики в напрямі Веєрштрассової теорії аналітичних функцій дає змогу оборонити Ейлерові позиції і в справах розбіжних рядів.

Ейлер володів означенням Коші суми ряду, як границі суми перших n його членів при необмеженому зростанні n, він не висловлював ніде цього означення явно, а тільки раз-у-раз використовував при ефективних обчисленнях за допомогою рядів. Він почував, що таке означення надто вузьке, і що коли йде мова про визначення аналітичної функції, то його можна зробити навіть через розбіжний степеневий ряд. Він наводить відомі тривіальні приклади, подібні до ряду:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ...,$$

що розбігається для

$$\left|x\right| \geq 1$$

Але для нього цей ряд має сенс при всякому x, бо він дає змогу відбудувати для всіх значень x-а ту функцію $\dfrac{1}{1-x}$, з якої він постав. Отже цей ряд цілком визначає цю функцію. Це є ідея визначення аналітичної функції через задання якогось одного її елементу або через задання коефіцієнтів її Тейлорового розвинення у якійсь одній точці.

З Ейлерового означення функції (див. попередній параграф) випливає однозначність її визначення поблизу точки $z = 0$ коефіцієнтами $A, B, ...$ її розвинення, а після Веєрштрассових робіт ми маємо загальний (хоч і теоретичний) спосіб вираховувати за допомогою цих коефіцієнтів значення нашої функції в довільній точці обсягу її існування.

Сама Ейлерова ідея функції переконувала його, що функціям (в Ейлеровому розумінні) властива *моногенність*, тобто властивість цілком визначатися своїми значеннями в околиці будьякої одної точки.

Іншими словами, розуміння аналітичного продовження в обсягу того класу функцій, що Ейлер розглядав, у нього було.

Мало того, він вказує різні конкретні способи для реалізації аналітичного продовження. В основному — це перебудова степеневого ряду за допомогою заміни змінного. Коли, напр., у ряді

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right),$$

що збігається в колі радіуса 1, зробити заміну змінного:

$$\frac{1+x}{1-x} = y,$$

то ряд

$$2\left(\frac{y-1}{y+1} + \frac{(y-1)^2}{3(y+1)^2} + \ldots\right)$$

збігатиметься до $\ln y$, при *всякій* невід'ємній дійсній частині числа y.

Відомі Ейлерові вказівки щодо посилення збіжності біноміальних розвинень і взагалі рядів — у застосуванні до рядів степеневих мають ту саму мету.

Нам відомо, що сучасні методи так знаного сумування рядів теж можуть здійснювати аналітичне продовження функції. З цього погляду така Ейлерова рівність, як

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1\ldots$$

є не просто наівно хибний результат, а використання того означання суми ряду, яке тепер називається Чезаровим способом сумування рядів. Вона правильно визначає значення функції

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

у точці

$$x = -1$$

Як уже вказувано, ідею многозначності аналітичних функцій висвітлили далеко пізніші покоління математиків, коли розгляд аналітичних функцій рішуче перенесено в площу комплексного змінного і встановлено принципи інтегрування функцій комплексного змінного. Правда, і тут Ейлер є надхненником, бо відомі умови Коші — Рімана для моногенності функцій вже подаються в одній з його (пізніх) робіт.

III. Інші трансцендентні функції

Самий довід формули

$$\psi(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

за допомогою Ейлерового розвинення виявляє правдивість функціонального рівняння

$$\psi(z+u) = \psi(z)\psi(u)$$

Взявши тут

$$z = ix, \quad u = iy,$$

де x та y — *дійсні* числа, легко формально ввести функції

$$\sin x \text{ та } \cos x,$$

як

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ та } \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

і звідси вивести розвинення тригонометричних функцій у ряди, означення обернених тригонометричних функцій, їх зв'язок з логарифмічною.

Проте Ейлер воліє йти конкретніше використавши Moivre-ову формулу для доводу рівностей:

$$\cos nt = \cos^n t - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} t \sin^2 t + \ldots$$

$$\sin nt = \frac{n}{1}\cos^{n-1} t \sin t - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} t \sin^3 t + \ldots,$$

він граничним переходом:

$$t \to 0, \quad n \to \infty,$$

поклавши

$$nt = x,$$

дістає

$$\cos t \to 1, \quad \frac{\sin t}{t} \to 1$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Той самий граничний перехід у Moivre-овых формулах:

$$\cos nt = \frac{(\cos t + i\sin t)^n + (\cos t - i\sin t)^n}{2}$$

$$\sin nt = \frac{(\cos t + i\sin t)^n - (\cos t - i\sin t)^n}{2}$$

дає:

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n + \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n}{2} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n - \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n}{2i} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Цей спосіб виводу Ейлерових формул дає зразу означення функцій $\sin z$ та $\cos z$ для комплексного аргумента.

Представлення функцій $e^z, \sin z, \cos z$ як границь певних многочленів привело Ейлера до результатів, що в руках Якобі стали засобом до утворення теорії еліптичних функцій.

Ейлер каже (виходячи з «актуалізованих» нескінченно малих), що e^z є добуток лінійних множників $1+\frac{z}{n}$, рівних між собою*

$$e^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \qquad (n=\infty)$$

Отже з цього погляду рівняння

$$e^z = 0$$

має безліч рівних коренів

$$z = -n, \quad (n=\infty)$$

в той час, як для нас це рівняння не має кореня†. Далі він переходить до труднішого питання про корені рівняння

$$e^z = a \quad (a \neq 0)$$

Він приходить знов до розкладу на лінійні та квадратні множники виразу

$$e^z - a,$$

що, проте, його не задовольняє. Напр., рівність

$$e^z - 1 = Az\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{4k^2\pi}\right) \qquad (n=\infty)$$

він відкидає тому, що бачить неможливість викинути доданок

* Introductio, розд. 9.

† Пор. у § I розбір Ейлерового твердження, що всяке рівняння має корінь $f(z)=c$.

$$\frac{z}{n} \quad (n = \infty)$$

Справді бо, позбутися його, додержуючи Ейлерових принципів математичної символіки, можна так:

$$e^z - 1 = Az\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi\left(1 + \frac{z}{n}\right)}\right) =$$

$$= A\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi}\right) \qquad (n = \infty)$$

І остаточно так:

$$e^z - 1 = Ae^{\frac{z}{2}}z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi}\right)$$

Поклавши

$$z = 0$$

бачимо, що

$$A = 1$$

і остаточно маємо:

$$e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}} = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi}\right),$$

що веде легко й до формули:

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{4k^2\pi}\right)$$

і до відповідного розкладу в нескінченний добуток функції $\cos z$:

$$\cos z = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

ЦІ формули Ейлер встановив трохи інакше, але ідейна сторона його доводу цілком виявлена наведеними міркуваннями.

Постава і розв'язок питання про розклад на елементарні множники функцій $\sin$us і $\cos$inus були імпульсом для розробки в XIX і XX століттях загальної теорії розкладу цілих трансцендентних функцій на елементарні множники.

Цю теорію почав Веерштрасс, а продовжили, розвинули і застосували Пуянкаре, Борель, Адамар та інші.

З труднощів цієї теорії, які вже бачив Ейлер, вкажімо на дві:

1. Коли абсолютні значення нулів a_i функції ростуть недосить швидко, то добуток:

$$\prod\left(1-\frac{z}{a_i}\right)$$

розбігається. Справді, такий випадок ми і маємо для функцій $\sin$ і $\cos$. Еейлер цю трудність переміг, сполучивши попарно множники типу:

$$\left(1-\frac{z}{a_i}\right) \text{ та } \left(1+\frac{z}{a_i}\right)$$

в один

$$1-\frac{z^2}{a_i^2}$$

Веєрштрасс показав загальний спосіб позбутися цієї перешкоди, замінивши множник $1-\dfrac{z}{a_i}$ множником

$$\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\varphi\left(\frac{z}{a_i}\right)},$$

де $\varphi(\,)$ є відповідно дібрана ціла раціональна функція.

2. Звичайно розклад — навіть на такі загальні множники — дає функцію тільки з точністю до множника $e^{f(z)}$, де $f(z)$ є якась ціла (може й трансцендентна функція). З цим випадком здибався Ейлер на прикладі $e^z - a$.

Пізніший розвиток Ейлерової ідеї дав загальну теорію, що, проте, досить трудно застосовується до конкретних прикладів. Отже й на сьогодні Ейлерів спосіб для тригонометричних функцій найкращий.

Ейлер дав легке, але важливе узагальнення своїх результатів, що веде між іншим, до таких формул:

$$\frac{\cos z+\cos a}{1+\cos a}=\prod_{k=0}^{\infty}\left[1-\frac{2az-z^2}{(2k+1)^2\pi^2-a^2}\right]=$$

$$=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{(2k+1)\pi^2-a}\right)\left(1+\frac{z}{(2k+1)\pi+a}\right)$$

$$\frac{\cos z - \cos a}{1 - \cos a} = \prod_{k=0}^{\infty}\left[1 - \frac{2az - z^2}{4k^2\pi^2 - a^2}\right] =$$
$$= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{2k\pi - a}\right)\left(1 + \frac{z}{2k\pi + a}\right)$$
$$\frac{\sin a - \sin z}{\sin a} = \left(1 - \frac{z}{a}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left[1 - \frac{z^2 - 2az}{k^2\pi^2 - a^2}\right] =$$
$$= \left(1 - \frac{z}{a}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{k\pi + a}\right)\left(1 - \frac{z}{k\pi - a}\right)$$
$$\frac{\sin a + \sin z}{\sin a} = \left(1 + \frac{z}{a}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left[1 - \frac{z^2 + 2az}{k^2\pi^2 - a^2}\right] =$$
$$= \left(1 + \frac{z}{a}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k\pi + a}\right)\left(1 + \frac{z}{k\pi - a}\right)$$

Наведені розклади тригонометричних функцій ведуть Ейлера, через розвинення нескінченних добутків у степеневі суми, до сумування таких рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\pi^2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\pi^4 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\pi^4}{25},$$

а також таких:

$$(A)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)n - m} - \frac{1}{(2k+1)n + m}\right) = \frac{t\pi}{2n}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{((2k+1)n - m)^2} - \frac{1}{((2k+1)n + m)^2}\right) = \frac{(t^2+1)\pi^2}{4n^2}$$
$$(B)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2kn + m} + \frac{1}{2kn - m}\right) = \frac{\pi}{2nt}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2kn - m)^2} - \frac{1}{(2kn + m)^2}\right) = \frac{(t^2+1)\pi^2}{4n^2t^2}$$

де:

$$t = \operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}$$

З них формули (A) та (B) дають розвинення функцій tangens і cotangens в суми елементарних дробів. Це є історично перше розвинення трансцендентних функцій в такі суми. Пізніше Коші, Міттаг-Лефлер та ін. розвинули нову теорію представлення через елементарні дроби всякої однозначної аналітичної функції з ізольованими особливими точками, але Ейлерів спосіб у застосуванні до тригонометричних функцій і тепер найлегший для викладання і найбільш научний.

Зауважимо ще, що Ейлер дав прекрасне використання представлень $\sin$-а й $\cos$-а в формі нескінченних добутків — до обчислення логарифмів тригонометричних функцій. Нарешті, Ейлер подав дуже важливі формули множення та ділення кута під знаком тригонометричних функцій, з яких виявляється (хоч остаточних висновків Ейлер сам не робить), що визначення тригонометричних функцій через функціональне рівняння:

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

або, що те саме, визначення функцій e^z через функціональне рівняння

$$e^{i(u+v)} = e^{iu} \cdot e^{iv}$$

є найдосконаліший спосіб не тільки її числового вирахування, а й щонайглибшого дослідження.

Розклад на лінійні множники многочлена

$$\sin z = \frac{(x+iy)^n - (x-iy)^n}{n},$$

де

$$x = \sin z, \;\; y = \cos z,$$

легко веде до рівності:

$$\sin nz = 2^{n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n} \pm z\right) \qquad (n \text{ множників})$$

і до рівності:

$$\frac{1}{\sin nz} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n} + z\right)}$$

Подібні ж рівності можна вивести для $\cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$. Це дає змогу (Ейлер не робить цього останнього, але очевидного кроку) граничним переходом $n \to \infty$ установити знов нескінченні добутки для всіх шістьох тригонометричних функцій і розклади на елементарні дроби для $\mathrm{tg}, \mathrm{ctg}, \sec, \mathrm{cosec}$.

Ми спинилися докладніше на Ейлеровому викладі теорії тригонометричних функцій, щоб яскравіше виявити його вплив на один з найвидатніших творів з математики XIX ст., а саме на «Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum» Якобі. Ні сам Ейлер, ані Лежаадр, хоч вони могутньо спричинилися до розвитку цієї теорії, не зробили в ній останнього принципіального кроку — не перейшли від вивчення еліптичних інтегралів до вивчення обернень тих інтегралів — еліптичних функцій.

У рівності

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^\varphi d\varphi \quad (y = \sin\varphi)$$

верхня межа y нашого інтеграла дорівнює $\sin x$:

$$y = \sin x$$

З Ейлерових часів почали докладно вивчати складніші інтеграли, зокрема такі, де підінтегральна функція раціонально залежить від y і від квадратного кореня з многочлена 3-го або 4-го ступеня. Лежандр, що після Ейлера о XVIII і на початку XIX ст. найбільше зробив у цій теорії, назвав еліптичним інтегралом I роду вираз:

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

що при $k = 0$ дає, як ми бачили:

$$y = \sin x$$

Пропонується і в загальному випадку (коли k є будьяке число) розглядати верхню межу у нашого інтеграла як функцію самого інтеграла x; для цієї функції введено зазначення sn:

$$y = \mathrm{sn}\, x;$$

поруч цього введено функції:

$$\sqrt{1-y^2} = \mathrm{cn}\, x$$

і

$$\sqrt{1-x^2y^2} = \mathrm{dn}\, x$$

Ці три функції звуть *еліптичними*. Показано, що ці функції однозначні. Якобі глибоко вивчив властивості цих функцій, що таксамо дають змогу обчисляти довжини дуг еліпса, як тригонометричні — довжини дуг кола.

Ще Лежандр обчислив таблиці цих функцій, ввівши їх таким чином у широкий вжиток, як це ще з давніх часів було зроблено з тригонометричними функціями.

Найосновніша властивість тригонометричних функцій, що визначає їх з точністю до сталого множника, є так звана теорема додавання:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (\sin 0 = 0)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (\cos 0 = 1)$$

Вона є, як знаємо, висновок з теореми множення експоненціальної функції

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

Ще Ейлерові досліди дали змогу встановити подібну ж теорему додавання для еліптичних функцій:

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta + \operatorname{sn}\beta\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta}$$
$$\operatorname{cn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta - \operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta}$$
$$\operatorname{dn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta - k^2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta}$$

На підставі цих формул Якобі встановлює, що еліптичні функції є *двоперіодичні* — так само, як тригонометричні є *одноперіодичні*. При тім відношення двох основних періодів у еліптичних функцій *не може бути числом дійсним*. Отже, коли схочемо геометрично представити всі періоди еліптичної функції, то дістанемо на комплексній площі сітку точок, складену з рівних паралелограмів. Так натурально виявляється потреба розглядати еліптичні функції в комплексному обсягу.

Цілком подібно до Ейлерової формули множення для функції $\sin$us — з теореми додавання Якобі виводить:

$$\operatorname{sn} nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k^{n^2-1}}\prod_{m,m'=0}^{\pm\frac{n-1}{2}}\operatorname{sn}\left(x+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right) \quad (n \text{ — число непарне})$$
$$\operatorname{cn} nx = \sqrt{\left(\frac{k}{k'}\right)^{n^2-1}}\prod\operatorname{cn}\left(x+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right)$$
$$\operatorname{dn} nx = \sqrt{\left(\frac{1}{k'}\right)^{n^2-1}}\prod\operatorname{dn}\left(x+\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right),$$

де

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad K' = \int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}.$$

Звідси можна вивести вирази для $\operatorname{sn} U, \operatorname{cn} U, \operatorname{dn} \mathrm{U}$ в формі часток з нескінченних добутків — як для функцій tg та ctg. Ці нескінченні добутки є одноперіодичні цілі трансцендентні функції, що мають назву ϑ-функцій. Вони є *подвійні*: два значки m та m' міняються в межах від 0 до ∞; отже вони не такі зручні, як Ейлерові добутки для $\sin$us-а й $\cos$inus-а. Якобі тому дає й інші добутки для $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$ і dn, цілком аналогічні Ейлеровим, де, як основний елемент, фігурує замість незалежного змінного його одноперіодична функція (напр., $\cos$):

$$\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2Kx}{\pi}\sin x \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1-2q^{2l}\cos 2x + q^{4l}}{1-2q^{2l+1}\cos 2x + q^{4l+2}}$$

$$\operatorname{cn}\frac{2Kx}{\pi} = B\cos x \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1+2q^{2l+1}\cos 2x + q^{4l+2}}{1-2q^{2l+1}\cos 2x + q^{4l+2}}$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Kx}{\pi} = C \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1+2q^{2l+1}\cos 2x + q^{4l+2}}{1-2q^{2l+1}\cos 2x + q^{4l+2}}$$

де

$$q = e^{-\frac{i\pi K'}{K}}$$

$$A = \left\{ \frac{\prod_{l=0}^{\infty}(1-q^{2l+1})}{\prod_{l=1}^{\infty}(1-q^{2l})} \right\}^2 = \frac{\pi\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}K}, \quad B = \left\{ \frac{\prod_{l=0}^{\infty}(1-q^{2l+1})}{\prod_{l=1}^{\infty}(1+q^{2l})} \right\}^2 = 2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{K'}{K}},$$

$$C = \left\{ \frac{\prod_{l=0}^{\infty}(1-q^{2l+1})}{\prod_{l=1}^{\infty}(1+q^{2l+1})} \right\}^2 = \sqrt{K'}$$

та відповідні формули для розкладу функцій $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ у суми елементарних дробів.

Нарешті, використавши Ейлерову тотожність*

* Introductio, ч. 1, розд. 16.

$$(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)... = 1 + x\frac{q}{1-q} + x^2\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} +$$
$$+x^3\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}...$$

і їй подібну

$$\frac{1}{(1-qx)(1-qx^2)(1-q^3x)} = 1 + x\frac{q}{1-q} + x^2\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} +$$
$$+x^3\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + ...$$

Якобі приходить до розвинення чисельника та знаменника попередніх виразів у тригонометричні ряди, що надзвичайно швидко збігаються ($\left|q\right| < 1$) і практично зводять еліптичні функції дійсного аргумента до тригонометричних:

$$\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x + ...}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + ...}$$
$$\operatorname{cn}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + ...}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + ...}$$
$$\operatorname{dn}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\cdot\frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + ...}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + ...}$$

Цікаво, що на протязі всієї своєї книги Якобі, посилаючися на інші роботи Ейлера, тільки один раз згадує про Introductio*, що було — сміливо можна сказати — головним його надхнеником у більшій частині його книги — скрізь, де він подає представлення еліптичних функцій через нескінченні добутки та суми й робить різні висновки з теореми додавання. Тому, треба гадати, що в ті часи (1820–1830 роки) Ейлерове Introductio, що мало вже 80-літню давність, було ходовою популярною книгою серед математиків.

Якобієвою теорією еліптичних функцій завершується розвиток теорії функцій способами, що їх дав Ейлер, і в межах його означення функції. Ці способи визначаються великою конкретністю і урахуванням потреб практичного обчислення. Зокрема щодо періодичних фун-

* Згадка про Ейлерову тотожність:

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)... = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26}...$$

не має істотного значення для Якобієвої теорії.

кцій, то шукання в цьому напрямі припинилися самі собою після Якобієвої теореми про неможливість функції більше як з двома істотно різними періодами. З другого боку, годі було шукати дальших типів функцій, що справджують так звану алгебричну теорему додавання:

$$G[\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\alpha+\beta)] = 0,$$

де G є знак многочлена. Виявилося, що ейлерівський період використав до кінця цей могутній спосіб аналітичного продовження. Веєрштрасс довів, що всяка функція, яка справджує алгебричну теорему додавання, є алгебрична комбінація з раціональних тригонометричних або еліптичних функцій. Це передчував ще сам Ейлер, коли дав твердження, що для гіпереліптичних інтегралів теореми додавання не існує.

Дальший розвиток теореми аналітичних функцій пішов шляхом розвитку загальної теорії функцій комплексного змінного і вивчення алгебричних функцій та їх інтегралів.

Узагальнення поняття періодизму привело в кінці XIX ст. до відкриття класу автоморфних функцій (Пуанкаре, Клейн), до якого належать і тригонометричні й еліптичні функції як частинні випадки. Проте, Ейлерове твердження, що основне джерело нових трансцендентних функцій є інтегральне числення, цілком зберегло свою силу до наших часів.

IV. Історія і обґрунтування аналізу нескінченно малих

Ейлер — вихованець континентальної школи щодо розуміння нескінченності в аналізі. Лейбніцова система диференціального і інтегрального числення мала вірного прихильника в особі його вчителя Івана Бернуллі. Ейлерові фундаментальні курси, особливо Introductio in Analysin Infinitorum, Institutiones Calculi Differentialis та Institutiones Calculi Integralis, оо мали незрівняний авторитет і величезну популярність, спричинилися до остаточного закріплення прав громадянства за аналізом нескінченно малих, не зважаючи на те, що сам Ейлер дав не так багато для закріплення логічних основ нового числення.

Він належав до того типу математиків, які широко використовували індукцію та інтуїцію в здобутті нових наукових істин.

Цим він у науковій творчості продовжував золотий вік математики часів Декарта — Лейбніца. Безперечну довідну силу щодо правильності основ нового числення для нього мали правильні розв’язки конкретних задач.

В XVII ст. тільки глибоко-критична думка Ньютона не задовольнялася такою аргументацією; ми знаємо, що Ньютон, не вважаючи на заперечення його пріоритету, висунені з боку прихильників Лейбніца, так на протязі всього життя і не опублікував свого методу флюксій; вихований в стилі суворо-логічних конкретних доводів античної науки, він не відважився недосконалу аргументацію на користь нових методів зробити підпорою епохальних результатів своєї «Натуральної філософії», залишивши «Метод флюксій» для себе лише як евристичний засіб.

Ейлер, що був уже вільніший від античної традиції, що мав у роботі своїх попередників величезний матеріал цінних конкретних результатів, здобутих новими методами, легше сприйняв формально викінчену(хоч по суті й необгрунтовану) Лейбніцову систему. Він не мав внутрішньої потреби глибше її обгрунтовувати; тому його міркування в цім обсягу мають характер лише педагогічних роз’яснень та досить еклектичної апологетики.

Ця сторона діяльності Ейлера теж, безперечно, мала величезний вплив на розвиток математичної думки у XIX ст., але він мав швидше гальмівний характер. Основна популярно-підручна математична література XIX ст. під тиском Ейлерового авторитету, в питаннях про нескінченність, неперервність, про поняття функції, взагалі в питаннях про основи нової математики, залишається загалом на рівні XVIII ст. В неї надзвичайно повільно пробиваються ті струмки критичної думки, що зусиллями Коші, Діріхле, Рімана, Веєрштрасса, Кантора — значно висвітлили поняття, які лежать в основі аналізу нескінченно малих і які дали йому досконаліше обгрунтовання. Ця література намагалася законсервувати здобутки науки XVII–XVIII століть, ставлячись до них як до чогось викінченого, завершеного, непогрішимого. Збираючи окрушини «срібного» XVIII віку розвитку буржуазної математичної думки, ця епігонічна література нехтувала ті струмки нової потужної математичної творчості, які плідно сприймали і вдосконалювали спадщину попередніх віків, готуючи останній розцвіт буржуазної науки.

Принципіального значення і потреби розробки поняття границі, як основної операції аналізу нескінченно малих, Ейлер не почував, хоч з цього поняття описово й користувався. В передмові до Institutiones Calcululi Differentials він так з’ясовує зміст диференціального числення.

Диференціальне числення «є метод визначати відношення зникливих (evanescentium) приростів будьяких функцій, коли аргументові дати зникливий (evanescens) приріст... Диференціальне числення не так досліджує ці самі зникливі прирости, як їх відношення та взаємні пропорції; а що ці відношення подаються скінченними числами, то слід уважати, що це числення трактує скінченні величини... Нескінченно малі, що їх розглядають у диференціальному численні, абсолютно не відрізняються від нічого». Щоб підкреслити абсолютну точність методів аналізу нескінченно малих, він заперечує вульгарну трактовку нескінченно малих, як дуже малих величин (напр., порошинка проти гори або цілої земної кулі); на його думку, закиди проти нового числення в цім випадку були б цілком обгрунтовані. Не вбачаючи ніякої принципіальної трудності розглядати відношення $\frac{0}{0}$ як цілком певне число, Ейлер, тільки як з ілюстративного засобу, користується з граничного переходу і з самого слова *границя* (limes): «Оця границя, що є наче остаточне (ultima) відношення тих приростів, справжній предмет диференціального числення». Таксамо в розумінні сучасної математики він за допомогою поняття границі трактував збіжність числових рядів. Але це поняття не стало у нього *робочим* поняттям. Через те він ніде не оперує похідними, а тільки диференціалами; через те він оперує поруч збіжних рядів також рядами розбіжними.

Непевність позицій Ейлера в цьому принципіальному пункті коротко можна, схарактеризувати так: вагання між актуальною та потенціальною нескінченністю; розуміння, але неповна з'ясованість процесу граничного переходу як діалектичного «вузла», зміни якості.

Епігони Ейлерових позицій у викладі основ аналізу, автори популярних курсів XVIII й XIX ст. призвели до певного спотворення і вульгаризації поглядів Ейлера, завівши метафізичну плутанину в речі, які добре розуміли, але неповно розвинули й висловили їх великі попередники. Напр., прийнявши поширеніше проти Ейлерового поняття функції, вони, проте, твердили (та й пробували довести), що всяка неперервна функція має похідну. Вони були не раз певні універсальності застосування Тейлорової формули, тоді як Ейлер рішуче уникав її в загальних міркуваннях, застосовуючи тільки в конкретних задачах. Вони доводили Ньютонову біноміальну формулу на підставі (недоведеної) Тейлорової, вважаючи Тейлорову — за загальну базу аналізу, отже залишаючи аналіз без усякої бази.

Критику цього некритичного епігонізму маємо в математичних роботах Маркса, який глибоко з'ясував основні риси і принципіальні засади аналізу XVII–XVIII століть і помилки епігонів XIX ст. Маркс підкреслює, між іншим, і принципіальне, основне значення Ньютонової формули, як певного універсального способу в межах Ейлерової теорії функцій — алгебричних і елементарних трансцендентних. Тут буде корисно нагадати хід Марксових думок щодо використання Ньютонової формули для диференціації функції

$$y = a^x \qquad (a > 0)$$

Застосовуючи Ньютонову формулу, маємо:

$$y(x+\Delta x) - y(x) = a^x\left[a^{\Delta x} - 1\right] = a^x[(1+(a-1))^{\Delta x} - 1] =$$

$$= a^x\left[\begin{array}{l}\Delta x(a-1) + \dfrac{\Delta x(\Delta x - 1)}{1\cdot 2}(a-1)^2 + \\ + \dfrac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3 + \ldots\end{array}\right]$$

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = a^x\left[\begin{array}{l}(a-1) + \dfrac{\Delta x - 1}{1\cdot 2}(a-1)^2 + \\ + \dfrac{(\Delta x-1)(\Delta x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3 + \ldots\end{array}\right]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = a^x\left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\right] =$$

$$= a^x \ln a$$

Крім використання біноміальної формули в основній викладці, ми її маємо також в заміні ряду

$$(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3}\ldots$$

через $\ln a$. Справді, в Introductio Ейлер якраз встановлює цей ряд за допомогою біноміальної формули.

Ми знаємо, правда, що цей ряд не збігається для $\left|a-1\right| > 1$. Проте, Маркс не робить з цього приводу ніякої уваги, як у подібних обставинах не робив і Ейлер. Отже Маркс і в цьому пункті — вживанні розбіжних рядів — не стоїть на позиціях епігонів Ейлера, а додержує Ейлерового погляду на ряд, як на елемент аналітичної функції, як на спосіб, що незалежно від збіжності дає змогу встановлювати ті чи інші властивості функцій.

З другого боку, Маркс підкреслює містичні елементи в Лейбніцовій системі диференціального числення, вказуючи, що Ейлер їх перемагав (виявляючи принципіальне значення поняття границі).

В наші часи критична переробка основ аналізу дійшла вже до загальних курсів і шкільного навчання, але з одною хибою: без висвітлення історичного ходу розвитку науки та роботи критичної думки на її основами. Маркс дав програму для такого вивчення, і в цій програмі Ейлер та його доба повинні заняти поважне місце, як перша доба упорядкування основ аналізу в межах Ейлерового розуміння функції, як початок критичної розробки революційних наукових ідей XVII ст.

У світлі Ейлерового розуміння функції, як воно виявляється з I тому його Introductio, виглядає цілком зрозуміло його твердження, що приріст усякої функції, відповідний приростові й аргумента, є степеневий ряд щодо ω:

$$y(x+\omega)-y(x)=P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+...$$

Цим самим *постулативно* вводиться як основа диференціального числення Тейлорів ряд. Розуміється, коли не журитися питаннями збіжності, то цей постулат стає теоремою, довід якої базується єдино на Ньютоновій біноміальній формулі, як це вказує Маркс[*].

На цій підставі Ейлер трактує диференціальне числення як частинний (скажемо краще: граничний) випадок різницевого числення[†], і ввесь перший розділ в Institutiones Calculi Differentialis присвячує теорії скінченних різниць, що знов таки базується на біноміальній формулі.

Одна з характерних рис Ейлерового викладу аналізу нескінченно малих є велика конкретність, уникання загальних тверджень, що в ті часи не могли бути доведені. Ефективні обчислення, які дають результати з десятками певних цифр, залишають поза всяким сумнівом практичне значення, а раз-у-раз і збіжність тих процесів (зосібна рядів), якими ці результати добуваються. З нього погляду особливо майстерні глибокі досліди розділів 5–7 в Institutiones Calculi Differentialis, де подається і широко використовується так звану Ейлер — Маклоренову формулу, що й досі являє джерело нових математичних дослідів.

Ідея аналітичного продовження, так майстерно використана через теорему додавання і через розбіжні ряди в Introductio, виникає в Ейлера пізніше знов у формі інтерполяції функцій, що задаються, напр., для самих цілих значень аргумента, як, напр.,

[*] Марксизм и естествознание, с. 156.

[†] Institutiones Calculi Differentialis, розд. 4, § 114.

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{x}$$

Розвиваючи думки Валліса та Ньютона, розділи 16–17 в Institutiones Calculi Differentialis розроблюють цю думку. Керуючися цією думкою, Ейлер увів, як знаємо, свої знамениті трансцендентні функції Г та В. Це коло Ейлерових думок вже останнім часом, у ХХ ст., притягло значний інтерес дослідників.

Такі функції, як $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, Ейлер називає functiones inexplicabiles, отже він визнає, що вони, взагалі кажучи (принаймні однозначно), не виражаються через алгебричні операції (взяті хоч би й у нескінченній кількості). Отже ці функції виходять поза межі Ейлерового означення функції. Алеж сама задача про їх інтерполяцію ставиться так, щоб перетворити їх з «аномальних» функцій у функції в Ейлеровому розумінні, щоб увести в коло функцій «законно визнаних».

Ейлер скрізь означує дію інтеграції як зворотну щодо диференціації, хоч і використовує її й до розв'язання означених задач, які по суті зводяться на означене інтегрування. Безперечно, тут знов виявляється поперше, тенденція його як дослідника не вводити загальних понять, яких він не може обгрунтувати (довід і існування означеного інтеграла), подруге,— користуватися з ефективних методів обчислень, з принципу: в математиці існує, безперечно, те, для чого маємо спосіб обчислення з довільно малою похибкою. Методологічний принцип діалектичного матеріалізму, поєднання теорії з практикою — вимагає від сучасної математики якраз такої розробки математичних теорій, щоб вони давали способи ефективного розв'язання задач обчисленням.

Думається, що, викладаючи аналіз нескінченно малих у нашій вищій школі, ми не раз у трьох пунктах нехтуємо ті правильні методологічні настанови, яких стихійно додержував Ейлер у своїх курсах.

Ми не завжди додержуємо того майстерного поєднання диференціального та інтегрального числення, яке являють собою дві нероздільні сторони одної теорії і зразок якого дав Ейлер у своїх Institutiones Calculi Differentialis.

Ми не вміємо належно прищепити молоді охоти та вміння до ефективних обчислень. І досі має силу забобон, що вища математика не потребує обчисляти, що це для неї занизька матерія, що її суть — абстрактні спекуляції. Читання Ейлера один з найкращих виховних засобів, щоб виправити цю хибу.

Ми не раз грішимо на невідповідність між проблемами та тими засобами, що вживаємо для їх розв'язання. Ейлер та Якобі показали, як мінімальними засобами можна побудувати теорію елементарних трансцендентних та еліптичних функцій; а ми вживаємо такого загального способу як Тейлорова формула, щоб розвинути в ряд $\lg(1 + x)$. Ми не додержуємо належно принципу переходу від конкретнішого до загальнішого.

На закінчення цього параграфа наведімо погляд Ейлера на історію розвитку аналізу нескінченно малих*

«Ознаки такого роду міркувань (граничних переходів — *М. К.*) помічаємо в найдавніших авторів, отже й їм не можна відмовити певної ідеї та знання щодо аналізу нескінченних. Потроху потому ця наука зростала й нешвидко дійшла до свого теперішнього стану; проте, й досі в ній багато більше є скритого, ніж цілком висвітленого. Хоч диференціальне числення поширилося на всякого роду функції, хоч би як вони були складені, проте, не зразу здобуто спосіб порівнювати між собою прирости будьяких функцій, тільки ступнево цей винахід переходив на щораз складніші функції. Отже, що стосується функцій раціональних, то обчислення останнього відношення їх зникливих приростів слід віднести до часів значно давніших за Ньютонові та Лейбніцові; отже диференціальне числення, в застосуванні до самих раціональних функцій, треба вважати за винайдене задовго до цих часів».

«Далі, без сумніву, Ньютонові завдячуємо тією частиною диференціального числення, що стосується ірраціональних функцій; до неї він щасливо дійшов за допомогою своєї славетної теореми про загальне розвинення степенів двочлена; цим винятково важливим винаходом межі диференціального числення було напрочуд поширено. Лейбніцові не менше завдячуємо тим, що це числення, яке до того часу вважалося за якесь надзвичайне, він упорядкував в формі дисципліни, зібрав його правила в систему і зрозуміло пояснив. Звідси випливли великі можливості до дальшої розробки цього числення і для виводу бажаних результатів із певних принципів. Далі, заходами самого Лейбніца і заохочених ним до цього Бернулліїв межі диференціального числення було поширено на

* Institutiones Calculi Differentialis, Praefacio.

трансцендентні функції, що становили до того нерозроблену ділянку, і встановлено солідні основи інтегрального числення; їх зусиллями, що вдвох працювали в цьому обсягу, ділянка ця щораз збагачувалася. Але і Ньютон дав великі набутки інтегральному численню, перший винахід якого навряд чи може бути відділений від появи диференціального числення і цілком певно встановлений».

Коли б Ейлер схотів таксамо в кількох словах вказати, чим він спричинився до розвитку методу нескінченно малих, він мусів би вказати на нове поширення методу через уведення варіаційного числення, як нової галузі поруч числень диференціального та інтегрального (продовження Лейбніцової алгоритмічної діяльності) і застосування методу нескінченних до нових трансцендентних — зокрема відкриття еліптичних функцій в продовження Ньютонової діяльності в напрямі поширення функціональної бази математики.

Перша з цих двох теорій, розвиваючися невпинно до наших часів, узагальнюючися, веде нас до теорії функціоналів, тобто функцій від безлічі незалежних змінних. Ми не маємо змоги докладніше висвітлити могутній розвиток цих Ейлерових думок на протязі півтораста років. Скажемо тільки, що Ейлерове варіаційне числення та Фредгольмова теорія лінійних інтегральних рівнянь є перші та найелементарніші (правда, і найважливіші) розділи сучасної теорії функціоналів.

На ролі Ейлера в утворенні й розвитку теорії еліптичних функцій та споріднених трансцендентних спиняємося докладніше в наступному параграфі.

V. Значення Ейлера в теорії еліптичних функцій і Абелевих інтегралів

Великий чотиритомний трактат Ейлера Institutiones Calculi Integralis заслуговує на таку саму глибоку увагу, як і перша книга його Introductio. Не говорячи вже про те, що в цій книзі Ейлер встановлює всі ті квадратури, що беруться в елементарних функціях, всі ті класичні типи диференціальних рівнянь, що їх інтегрування зводиться до квадратур або й до елементарних функцій,— він дає надзвичайно багатий матеріал для утворення теорії інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними, просуває проблему кратного інтегрування, розвиває різні способи наближеної інтеграції і, нарешті, подає абрис нової галузі аналізу нескінченних — варіаційного числення. Але ми хочемо тут приділити більшу увагу одному з найвищих здобутків Ейлерового генія — теоремі додавання еліптичних інтегралів, що стала за основу до утворення теорії еліптичних функцій і до розвитку теорії тих трансцендентних, що виникають в наслідок інтегрування будьяких алгебричних функцій.

Цей класичний результат заслуговує на те, щоб його подати власними авторовими словами і в авторових зазначеннях. Ми почнемо з того пропедевтичного підходу, що ми його практикуємо й досі, хоч і не зовсім в такій формі*

«Про порівняння трансцендентних величин, що містяться в формі:

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{A+2Bx+Cxx}}$$

Задача 73

Коли між x та y дано алгебричне рівняння

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0,$$

визначити інтегральні формули заданої форми, які між собою можуть бути порівнені.

Розв'язок

Здиференціюймо дане рівняння і з диференціалу його

$$2\delta\partial x + 2\beta\partial y + 2\gamma x\partial x + 2\gamma y\partial y + 2\delta x\partial y + 2\delta y\partial x = 0$$

зберімо таке рівняння:

$$\partial x(\beta + \gamma x + \delta y) + \partial y(\beta + \gamma y + \delta x) = 0$$

Зазначивши

$$\beta + \gamma x + \delta y = p \text{ та } \beta + \gamma y + \delta x = q,$$

з першої рівності матимемо:

$$pp = \beta\beta + 2\beta\gamma x + 2\beta\delta y + \gamma\gamma xx + 2\gamma\delta xy + \delta\delta yy;$$

коли звідси відняти дане рівняння, помножене на γ, то вийде:

$$0 = \alpha\gamma + 2\beta\gamma x + 2\gamma\beta y + \gamma\gamma xx + \gamma\gamma yy + 2dxy,$$

тобто:

$$pp = \beta\beta - \alpha\gamma + 2\beta(\delta-\gamma)\alpha + (\delta\delta - \gamma\gamma)yy$$

Подібно ж дістанемо:

$$qq = \beta\beta - \alpha\gamma + 2\beta(\delta-\gamma)\alpha + (\delta\delta - \gamma\gamma)yy,$$

---

* Institutiones Calculi Integralis, vol. 1, Sectio secunda, cap. V, De comparatione quantitatum transcendentium in forma $\frac{Pdx}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}$ contentarum.

звідки вийде

$$p\partial x + q\partial y = 0$$

Через те, що p є вже функція самого y, а q — функція самого x, то покладімо

$$\beta\beta\alpha\gamma = A,\ \ \beta(\delta - \gamma) = B,\ \ \delta\delta - \gamma\gamma = C,$$

звідки:

$$\delta\gamma = \frac{B}{\beta},\ \ \delta + \gamma = \frac{C}{\delta - \gamma} = \frac{\beta C}{B},$$

а звідси:

$$\delta = \frac{BB + \beta\beta C}{2B\beta},\ \ \gamma = \frac{\beta\beta C - BB}{2B\beta},$$

а з першої:

$$\alpha = \frac{\beta\beta A}{\gamma} = \frac{2B\beta(\beta\beta - A)}{\beta\beta C - BB}$$

Взявши ці значення для α, γ, δ, переведемо рівняння

$$\frac{\partial x}{q} + \frac{\partial y}{p} = 0$$

в наступне:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{A + 2Bx + Cxx}} + \frac{\partial y}{\sqrt{A + 2By + Cyy}} = 0,$$

а це диференціальне рівняння справджує рівняння:

$$\frac{2B\beta(\beta\beta - A)}{\beta\beta C - BB} + 2\beta(x + y) + \frac{\beta\beta C - BB}{2B\beta}(xx + yy) + \frac{BB + \beta\beta C}{B\beta}xy = 0,$$

що є повний інтеграл знайденого диференціального рівняння, бо містить у собі нову сталу β.

Нема потреби, щоб ті формули дорівнювали самим буквам A, B, C; досить, щоб вони були їм пропорціональні, звідки:

$$\frac{\beta\beta - \alpha\gamma}{\beta(\delta - \gamma)} = \frac{A}{B} \text{ та } \frac{\delta + \gamma}{\beta} = \frac{C}{B}$$

Отже:

$$\delta = \frac{\beta C}{B} - \gamma \text{ та } \alpha = \frac{\beta B}{\gamma} - \frac{\beta A}{\gamma B}(\delta - \gamma),$$

або

$$\alpha = \frac{\beta\beta}{\gamma} - \frac{\beta\beta AC}{\gamma BB} + \frac{2\beta A}{B}$$

Тому повний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{\partial x}{\sqrt{A + 2Bx + Cxx}} + \frac{\partial y}{\sqrt{A + 2By + Cyy}} = 0$$

є

$$\beta\beta(CB - AC) + 2\beta\gamma AB - 2\beta\gamma BB(x + y) +$$
$$+\gamma\gamma BB(xx + yy) + 2\gamma B(\beta C - \gamma B)xy = 0,$$

де відношення $\frac{\beta}{\gamma}$ являє довільну сталу.

Без обмеження загальності можна вважати $B = 0$ та $x = 0$ при $y = 0$. Тоді з нашого інтеграла випливає*:

$$y = -x\sqrt{\frac{A + Cbb}{A}} + B\sqrt{\frac{A + Cxx}{A}},$$

що є загальний інтеграл того диференціального рівняння.

Тому, коли x узяти від'ємне, то повний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{\partial x}{\sqrt{A + Cxx}} = \frac{\partial y}{\sqrt{A + Cyy}}$$

буде

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cbb}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cxx}{A}}\text{»}$$

Ввівши зазначення:

$$p = \prod ix = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}}, \quad q = \prod iy = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}},$$
$$r = \prod iz = z\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cz^2}},$$

Ейлер дістає остаточно теорему додавання в формі:

$$p^4 + q^4 + r^4 - 2ppqq - 2pprr - 2qqrr = \frac{4Cppqqrr}{A}$$

і дає їй таку геометричну інтерпретацію: «коли p, q, r є боки трикутника, на якому описано коло з діаметром T, то завжди буде $A + CTT = 0$».

* Ibidem, scholion 2.

Як частинний випадок, з цього результату Ейлера виходить, що, коли:

$$\arcsin r = \arcsin x + \arcsin y,$$

то

$$r = p\sqrt{1-qq} + q\sqrt{1-pp}$$

Таксамо, коли

$$\log(r + \sqrt{1+rr}) = \log(p + \sqrt{1+pp}) + \log(q + \sqrt{1+qq}),$$

то

$$r = p\sqrt{1+qq} + q\sqrt{1+pp}$$

З теореми додавання тригонометричних функцій Ейлер виводить теорему множення в формі:

$$\frac{\partial r}{\sqrt{A+Crr}} = \frac{n\partial p}{\sqrt{A+Cpp}}$$

$$r = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P + p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n - \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P - p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n,$$

де

$$P = \sqrt{1 + \frac{Cpp}{A}}$$

Так утворено всі підстави для аналітичної побудови теорії тригонометричних функцій, розвиненої синтетично в I томі Introductio.

Цей виклад уже й для Ейлерових часів мав тільки пропедевтичне значення, і цінність його розкривається в тому геніальному узагальненні, що Ейлер дає в наступному розділі VI:

«Про порівняння трансцендентних величин, що містяться в формі:

$$\int \frac{P\partial x}{\sqrt{A + 2Bz + Czz + 2Dz^3 + Ez^4}}$$

Задача 78

Коли дано залежність між x та y:

$$\alpha + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + \xi xxyy = 0,$$

вивести звідси трансцендентні формули вказаної форми, що можуть бути між собою порівнені.

Розв'язок

З даного рівняння визначається кожне з змінних

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \zeta\zeta)xx - \gamma\zeta x^4}}{\gamma + \zeta xx}$$

та

$$x = \frac{-\delta y + \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \zeta\zeta)yy - \gamma\zeta y^4}}{\gamma + \zeta yy},$$

де корені буде зведено на приписану форму, поклавши

$$-\alpha\gamma = Am,\ \ \delta\delta - \gamma\gamma - \zeta\zeta = Cm,\ \ ma - \gamma\zeta = Em$$

Звідси:

$$\alpha = -\frac{Am}{\gamma},\ \ \zeta = \frac{Em}{\gamma} \text{ та } \delta\delta = Cm + \gamma\gamma + \frac{Aemm}{\gamma\gamma}.$$

Так виходить:

$$\gamma y + \delta x + \zeta xxy = \sqrt{m(A + Cxx + Ex^4)}$$
$$\gamma x + \delta y + \zeta xyy = \sqrt{m(A + Cyy + Ey^4)}$$

А саме задане рівняння по диференціації дає:

$$\partial x(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + \partial y(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) = 0,$$

де підставлення даних вище значень веде до:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}} + \frac{\partial y}{\sqrt{A + Cyy + Ey^4}} = 0$$

Отже, коли дано це диференціальне рівняння, то його справджує наступне скінченне рівняння:

$$-Am + \gamma\gamma(xx + yy) + 2xy\sqrt{\gamma^4 + Cm\gamma\gamma + AEmm} - Emxxyy = 0$$

або, поклавши $\frac{\gamma\gamma}{m} = K$, таке:

$$-A + K(xx + yy) + 2xy\sqrt{KK + KC + AC} - Exxyy = 0,$$

що, маючи сталу K, не належну до диференціального рівняння, є повний інтеграл.

Звідси ж випливає:

$$Ky + x\sqrt{KK + KC + 4E} - Exxy = \sqrt{K(A + Cxx + Ex^4}$$
$$Kx + y\sqrt{KK + KC + AE} - Exyy = \sqrt{K(A + Cyy + Ey^4}$$

Далі він розвиває цю основну думку так само, як у попередньому розділі.

Такими геніально простими способами знайдено славетну теорему додавання еліптичних інтегралів I роду.

Блискуче завершення цього відкриття дав Абель у 20-х роках XIX ст. своєю славетною теоремою додавання інтегралів від будьякої алгебричної функції, викривши цим нову важливу ділянку математики — теорію алгебричних функцій та Абелевих інтегралів — нових трансцендентних функцій, у тому ряді трансцендентних, що починається інтегралами:

$$\int \frac{dx}{x}, \ \int \frac{dx}{1+x^2}, \ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

і що Ейлер продовжив, додавши еліптичні інтеграли, насамперед, так звані еліптичні інтеграли I роду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

Сам Ейлер глибоко розумів усю вагу свого відкриття. Він пише* «Через те, що інтеграція формули $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}}$ ніяк неможлива через логарифми та колові дуги, то надзвичайно дивно, що таке диференціальне рівняння може інтегруватися алгебрично; бо те, що в попередньому розділі тим самим засобом було подано, можна вивести й звичайним способом, виразивши поодинокі диференціальні формули або через логарифми, або через колові дуги, яких подвійне порівняння веде до алгебричного рівняння. Тут же така пряма інтеграція неможлива, отже не видно ніякого іншого способу, яким одержаний інтеграл можна було б дослідити».

Ці слова слід тлумачити, як думку, що саме теорема додавання є спосіб до всебічного вивчення цих нових трансцендентних. Ейлер підійшов щільно до порогу відкриття еліптичних функцій, все зробив для цього відкриття, але здійснили його вже Абель та Якобі. Використавши Ейлерову теорему додавання, використавши Ейлерову теорію елементарних трансцендентних функцій і додавши сюди ще загальну теорію раціонального перетворення еліптичного інтеграла та славетний принцип подвійної періодичності, Якобі в основному вичерпав цю грандіозну Ейлерову тему.

Давши рекурентний спосіб для множення еліптичних інтегралів на будьяке ціле число n, Ейлер дав своїм наступникам принципіально все потрібне для побудови нової теорії.

* Ibidem.

Ейлер надзвичайно ретельно, докладно, багатьма нападами працював над своєю теоремою додавання, розуміючи, які вона обіцяє величні перспективи розвиткові математики. Вів докладно подає її застосування до різних частинних випадків, зокрема до тих, де еліптичні інтеграли переводяться на функції елементарні. Вів шукає найпростіших шляхів, щоб встановити свою теорему. Він подає цілу низку квадратур, що різними раціональними перетвореннями змінних вводяться на еліптичні.

Нарешті, він багато працював над застосуванням до цієї задачі одної з найулюбленіших своїх ідей — способу інтеграційного чинника в теорії диференціальних рівнянь*.

«Переходжу тепер до труднішої форми рівнянь, а саме:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}}+\frac{\partial y}{\sqrt{Y}}=0,$$

коли множник, що дає змогу його зінтегрувати (алгебрично — *М. К.*),

$$M=P\sqrt{X}+Q\sqrt{Y},$$

такий, що рівняння:

$$(P\partial x+Q\partial y)+\left(\frac{Q\partial x\sqrt{Y}}{\sqrt{X}}+\frac{P\partial y\sqrt{X}}{\sqrt{Y}}\right)=0$$

інтегрується почленно. Отже для першого чаєш буде

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};$$

за інтеграл візьмемо $2V\sqrt{XY}$, звідки:

$$Q=2X\,\frac{\partial V}{\partial x}+V\,\frac{\partial X}{\partial x}$$

та

$$P=2Y\,\frac{\partial V}{\partial y}+V\,\frac{\partial Y}{\partial y},$$

і, за першою умовою:

$$2Y\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+3\,\frac{\partial Y}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial y}+V\,\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=2X\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+3\,\frac{\partial X}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x}+V\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

З останнього рівняння, коли за V візьмемо певну функцію самих x та y, можна побачити, як дістати зручні значення для функцій X та Y.

---

* Institutiones Calculi Integralis, том 3, с. 505 і далі.

Даймо, поперше, функції V стале значення, напр., $V = 1$, отже перейдімо до умови:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2},$$

що не може існувати, коли не прирівняти обидві сторони якійсь сталій, скажімо $2a$, звідки дістанемо:

$$X = axx + bx + c \text{ та } Y = ayy + dy + e,$$

а звідси

$$P = \frac{\partial Y}{\partial y} = 2ay + d \text{ та } Q = \frac{\partial X}{\partial x} = 2aX + b,$$

звідки повне інтегральне рівняння виходить:

$$2axy + dx + by + 2\sqrt{XY} = \text{const}$$

Таким чином, диференціальне рівняння

$$\frac{\partial x}{\sqrt{axx + bx + c}} + \frac{\partial y}{\sqrt{ayy + dy + e}} = 0$$

інтегрується множником

$$M = (2ay + d)\sqrt{axx + bx + c} + (2ax + b)\sqrt{ay^2 + dy + e}$$

і тоді повний інтеграл дістає форму:

$$2axy + dx + by + 2\sqrt{(axx + bx + c)(ayy + dy + e} = C,$$

або, по знищенні ірраціональності:

$CC - 2C(2axy + dx + by) = (4ac - dd)xx + (4ac - bb)yy + 4bex + 4cdy + 4ce$»

Одержаний результат є узагальнення теореми додавання колових дуг.

Далі Ейлер розглядає випадок:

$$V = \frac{1}{(\alpha + \beta y - \gamma y)^2},$$

що дає йому узагальнення теореми додавання еліптичних інтегралів, і пробує інші форми інтеграційного множника, виконуючи величезні та прикрі викладки.

Не володіючи принципом подвійної періодичності, Ейлер, проте, в процесі впертої й довгої роботи над еліптичними квадратурами переконався, що взагалі вони не беруться через елементарні функції — за винятком деяких очевидних випадків. З другого боку, він таксамо догадався, що теорема додавання в своїй тричленній формі не поширюється на складніші алгебричні функції — навіть на такі прості випадки ірраціональностей, де під знаком квадратного кореня маємо, замість многочлена 3-го або 4-го ступеня (еліптичний випадок) многочлен 5-го або 6-го ступеня.

Обгрунтування цього факта належить теж до найкращих здобутків XIX ст. — теорії гіпереліптичних інтегралів, що явила собою другий (після теорії еліптичних функцій) приклад загальної теорії алгебричних функцій, Абелевих інтегралів та їх обернення.

Як відомо, теорема додавання для еліптичних інтегралів типу

$$\Pi : z = \int \frac{(L + Mzz + Nz^4)\partial z}{\sqrt{A + Czz + Ez^4}},$$

що їх знаходимо в тому самому славетному VI розділі I тому Institutiones Calculii Integralis, тісно зв'язана з задачею порівняння довжини різних дуг еліпса. З цього приводу* Ейлер пише: «Коли $\Pi : z$ визначає дугу якоїсь кривої лінії, відповідну абсцисі або хорді z, то це (теорема додавання — *М. К.*) дає змогу порівнювати між собою різні дуги цієї ж кривої... Таким способом виявляються цього роду визначені властивості кривих, зміст яких інакше навряд чи можна було виявити. Порівняння колових дуг, відоме з елементів, переведено легко, як ми бачили, в попередньому розділі, звідки також виводиться порівняння параболічних дуг. З даного розділу таким самим способом можна встановити порівняних дуг еліптичних та гіперболічних; бож, справді, взагалі дуга конічного перерізу виражається такою формулою:

$$\int \partial x \sqrt{\frac{a + bxx}{c + exx}};$$

а, перетворивши її на

$$\int \frac{\partial x(a + bxx)}{\sqrt{ac + (ae + bc)xx + bex^4}},$$

зможемо трактувати її за поданими правилами, поклавши

$$A = ac, C = ae + bc \text{ та } E = be, L = a, M = b \text{ та } N = 0$$

Це саме дослідження можна поширити на формулу, що її знаменник є:

$$\sqrt{A + 2Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4 + \ldots}$$

* Institutiones Calculii Integralis, том I, с. 400.

Тимчасом інтегральні формули складніші, де під знаком кореня трапляються вищі степені змінного z або сам знак кореня мав вищий ступінь, таким способом, як видно, не можна між собою порівнювати, за винятком дуже частинних випадків, коли якимсь підставленням їх можна бував звести до цього роду форми». Цей геометричний напрям у теорії еліптичних інтегралів у XIX ст. знайшов собі дуже плідне продовження в вищій геометрії, в геометричній теорії алгебричних функцій, в розподілі алгебричних кривих, крім ступенів, за родами; він привів до питання про уніформізацію кривих з допомогою раціональних та однозначних трансцендентних функцій, зокрема до теореми, що всяку криву 3-го порядку можна представити в параметричній формі за допомогою еліптичних функцій.

VI. Значення Ейлера в розвитку теорії чисел

Теорія чисел в XVII ст., корифеї якого були володарями дум та надхнениками Ейлера, мала менш відомі широкому загалові, але також геніальні здобутки, як і аналіз нескінченних. Згадаємо тут тільки двох першорядних творців у цьому обсягу — Фермата та Гюйгенса. По багатьох століттях післядіофантового періоду, ця ділянка математики в XVII сі. вперше почала давати значні здобутки. Цікаво, що в часах, коли ідея системного (зокрема десяткового) дробу запанувала майже неподільно як могутній засіб до обчислень, коли вона мала такі тріумфи, як здобуття Кеплеровнх законів руху планет та утворення логарифмічних таблиць, що були б абсолютно неможливі без тих засобів раціоналізації наближених обчислень, які давали десяткові дроби, — в цей самий час і старий Евклідів принцип ланцюгового дробу почав відроджуватися і знаходити собі нові високоцінні застосування. Не забудьмо, що це були часи, коли вже виступали з проектами метричної системи мір, коли й практика вимірів і практика обчислень рішуче зреклися Евклідового алгоритму як незручного, навіть гальмівного для розвитку науки, коли місце конкретних (не раз цілих) чисел у науці рішуче завойовували неперервно *змінні* величини. В цей самий час Діофантові проблеми про розв’язання неозначених рівнянь у цілих числах розпалюють новий інтерес до Евклідового алгоритму ланцюгових дробів. Гюйгенс дає йому блискуче застосування і глибокий теоретичний розвиток у зв’язку з розрахунками для свого планетарія; Ферманат — один з найгеніальшших дослідників у галузі теорії чисел на протязі всього культурного життя людскості — кладе основи сучасної теорії алгебричних чисел своїми працями з нелінійних неозначених рівнянь, зокрема теорії квадратичних форм, дає глибокі досліди в найтруднішому питанні арифметики про первісні числа, ставить проблему Діофантового рівняння:

$$x^n + y^n = z^n,$$

що поклала могутньо печать на ввесь наступний розвиток теорії чисел аж до наших часів. Деякі основоположні Ферматові думки ідейно близькі до принципу Евклідового алгоритму, бо зводять справу досліду до ланцюга заміни додатних чисел щораз меншими додатними цілими числами, що після скінченного числа кроків приводить процес до вичерпання і дає змогу відповісти на поставлене питання.

Таке блискуче поєднання в XVII ст. в математиці цих двох принципів — зміни неперервної і зміни дискретної (його можна порівняти з подібним явищем в сучасній фізиці) якнайкраще доводить, що способи дослідження повинні пристосовуватися до характеру досліджуваних об'єктів, що ці способи повинні виявляти й поєднувати в собі ті самі діалектичні суперечності, які є в природі тих об'єктів, що, нарешті, поєднання тих суперечливих способів є найкраща запорука успіху в вивченні діалектики реальних явищ і процесів.

Ми знаємо, як у наш час найвищі здобутки аналізу нескінченних при застосованні до вивчення законів *неперервного* і теорії чисел у формі дискретної геометрії, пристосованої до вивчення *дискретного*, поєднується в боротьбі за глибше пізнання структури й динаміки матерії.

Ейлер був перший, хто у XVIII ст. геніально поєднав у своїй особі роботу на цих двох великих ділянках математики, перший, хто дав настанови і почав безперервну традицію роботи в галузі теорії чисел, яка до того вважалася раз-у-раз за надто екзотичну, несерйозну, безперспективну, беззастосовну ділянку науки, щось на зразок збірки ігор та крутиголовок для розваги дітей і ексцентричних дорослих неробів. Після нього і на базі його здобутків, почасти ще за його життя, діяли в цьому обсягу такі першорядні світила математичної науки, як Лангранж, Лежандр, Гаусс, Лежен-Діріхле, Куммер, Чебишов, Ерміт, Золотарьов, Гільберт, Міньковський, Вороний.

За цей час було виявлено глибокі взаємні зв'язки теорії чисел з алгеброю, нескінченним аналізом, геометрією, фізикою та іншими науками. Методи неперервного аналізу та дискретного аналізу тісно сплелися у взаємному використанні і в спільності проблематики.

Ці глибокі зв'язки ще мало уявляв сам Ейлер. Він швидше шукав аналогій і взаємовикористання методів цих обох галузей, як це, напр., видно з застосувань тих самих ідей у Діофантовому нелінійному аналізі та в раціоналізації ірраціональних виразів для потреб інтегрального числення, але щодо вивчення природи він був рішучий прихильник принципу неперервної зміни, оборонець принципу нескінченної подільності матерії, і хоч його нескінченно малі були не раз «актуалізовані», проте, реальної межі подільності матерії він не визнавав, отже по суті в реальному світі він вбачав скорше нескінченності потенціальні, і далеко йому було до усвідомлення діалектичної єдності принципів дискретності та неперервності в природі.

Всю Ферматову проблематику Ейлер підняв на свої могутні плечі і всі основні лінії попередніх часів у теорії чисел розвинув і значно продовжив. Він розвинув методику квадратного Діофантового аналізу, особливо виявивши в теорії квадратичних форм значення Пеллевого рівняння

$$x^2 - Ay^2 = 1,$$

(де A, x та y числа цілі), глибоко дослідивши зв'язок його розв'язання з Евклідовим принципом поперемінного ділення, указавши, що ці розв'язання є неперервні наближення періодичного неперервного дробу, в який розвивається число $\sqrt{A}$. Цю теорію доповнили й викінчили Лагранж і Гаусс. Ейлер перший зробив перехід у теорії квадратичних форм до розгляду *цілих*, але не раціональних, а *алгебричних чисел*, тобто таких, що являють собою корені алгебричних рівнянь з цілими раціональними коефіцієнтами і старшим коефіцієнтом 1. Коли розглядати всі цілі алгебричні числа, раціонально утворені з одної ірраціональності типу $\sqrt{D}$, де D є якесь ціле раціональне число, то «одиниці» в такому «квадратичному» полі будуть не тільки $+1$ та -1, а ще й інші числа в скінченній або в нескінченній кількості. Всяке ціле число такого квадратичного поля без остачі ділиться на таку «одиницю». Всі такі «одиниці» є типу $x \pm y\sqrt{D}$ або типу $\dfrac{x \pm y\sqrt{D}}{2}$, де x та y є цілі раціональні числа. Отже добуток пари «спряжених» таких одиниць є $x^2 - y^2 D$ або $\dfrac{x^2 - y^2 D}{4}$ і, як ціле раціональне число, повинен дорівнювати звичайній одиниці. Звідси еквівалентність проблеми «одиниць» квадратичного поля з проблемою повного розв'язання Пеллевого рівняння. Тільки в XIX ст. ця Ейлерова проблема була поставлена для «алгебричних полів», що залежать від кореня не квадратного рівняння, а рівнянь вищих ступенів.

Найгеніальніший і єдиний повний здобуток щодо проблеми «одиниць» вищих полів дав Вороний вже в кінці XIX ст., встановивши узагальнення Евклідового алгоритму, геніально використаного Ейлером та Лагранжом для квадратичних полів.

Пророчі слова Ейлера про велике значення неперервних дробів для розвитку математики, які ми знаходимо в Introductio, справдилися повною мірою не тільки в працях Вороного, але й у тих різноманітних і глибоких їх застосуваннях в алгебрі, теорії функцій, теорії ймовірностей, що їх дано в працях Чебишова, Маркова, Стільтьєса та інших першорядних математиків XIX і XX століття.

Після дослідів Ейлера, Лежандра, Гаусса, Якобі, Гільберта — до цього часу розробляється в математиці проблема взаємності, що в найпростішій постановці звучить так: дано дві конгруенції

$$x^2 \equiv p \pmod q; \;\; x^2 \equiv q \pmod p,$$

де p та q є первісні числа; нехай про одну з цих конгруенцій відомо, що вона має розв'язки або не має їх; як просто виявити, чи має їх друга конгруенція? Ця постанова характерна для досліджень чисел «квадратичного поля». Відповідь на неї дав перший Ейлер, і ця відповідь фігурує в курсах теорії чисел під назвою «квадратичного закону взаємності». Центральне значення цієї теореми можна до певної міри порівняти з значенням основної теореми алгебри. Тому доводи її та її узагальнень на вищі обсяги з'являлися в великій кількості на протязі півтораста років після Ейлера. В загальній формі, для будьяких алгебричних полів задача ще й на сьогодні вимагає дальших досліджень.

Проблема первісних чисел і розкладу цілих раціональних також натурально привела до ширшого поняття цілого алгебричного числа, як задача розв'язання алгебричного рівняння до поняття комплексного числа. Питання про первісні алгебричні числа, про розклад алгебричних чисел на первісні множники привели до поняття так званих ідеалів, до, свого роду, «недійсних множників» у розкладі алгебричного числа на первісні множники. Як добуток двох «супряжених» чисел є дійсне число, так добуток із «супряжених» ідеалів є справжнє алгебричне число. На розвиток цієї узагальненої теорії розкладу на первісні «ідеальні» множники величезний вплив зробила проблема Фермата: довести, що при $n > 2$ рівняння

$$x^n + y^n = z^n$$

не розв'язується в цілих числах. Найбільші здобутки в цьому обсягу мав Куммер у XIX ст., ввівши «ідеальні» первісні числа в «алгебричному полі», утвореному коренем рівняння поділу кола. Але перший, а тому принципіально найважливіший крок тут зробив Ейлер, довівши неможливість рівності

$$x^3 + y^3 = z^3$$

через майстерне втягнення в розгляд кореня рівняння

$$\varepsilon^3 = 1$$

та через розклад суми

$$a^3 + y^3$$

на множники:

$$x + y,\ \ x + \varepsilon y,\ \ x + \varepsilon^2 y$$

Правда, Ейлерова задача полегшилася тим, що алгебричне поле, утворене числом ε, є квадратичне, при тім всі первісні числа цього поля є не «ідеальні», а справжні.

Проблема первісного числа є одна з найдавніших, найтрудніших і основних проблем теорії чисел. Дано велике число; виявити, чи воно первісне, і коли ні — то розікласти його на первісні множники. Загального способу на це, крім відомого Ератосфенового решета, наука й досі не має. Значна частина інших методів і проблем теорії чисел безпосередньо або посередньо виникла з цієї проблеми. Основоположна тут є ще відома Евклідова теорема, що первісних чисел є безліч. Справді бо, коли б їх була скінченна кількість і найбільше з них було p, то сума $p! + 1$, очевидно, не ділилася б ні на одне з них; а що вона *більша* за p, то ми приходимо до суперечності і теорему таким чином доведено.

Ейлер в Introductio* дав новий довід цієї теореми, що базується на рівності

$$\frac{1}{\prod_p \left(1 - \dfrac{1}{p^k}\right)} = \sum_n \frac{1}{n^k} \quad (k > 1)$$

* Том I, розд. 15.

де множення йде по всіх первісних додатних числах p, більших за 1, а сумування по всіх натуральних числах n. При $k = 1$ права сторона цієї рівності стає нескінченністю; отже, коли б кількість первісних чисел була обмежена, то при значеннях k близьких до 1 права сторона нашої рівності була б більша за ліву, що й доводить теорему. Далі* Ейлер ставить проблему вирахування суми $\sum \frac{1}{p^k}$, поширеної на всі додатні первісні числа p.

Цими величезної принципіальної ваги думками Ейлер поклав початок так званій аналітичній теорії чисел, тобто використанню математичного апарату аналізу неперервного в дослідах дискретної зміни. Так стихійно в ньому пробивалася правильна методологічна тенденція, не вважаючи на хибні загальні філософські настанови. Один з найпишніших плодів цієї Ейлерової думки, виконаних під безпосереднім впливом Ейлерових настанов та Ейлерового аналітичного апарату, є результат Чебишова щодо кількості первісних чисел у даних межах. Насамперед, розглядаючи інтеграли, тісно зв'язані з Ейлеровою функцією Γ, що узагальнює на випадок неперервної зміни числову функцію $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x = x!$ (x-й факторіал), Чебишов установляє рівність

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} dx}{\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx}$$

і цим доводить, що *різниця*

$$f(\rho) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \tag{1}$$

та всі її похідні по ρ *при* $\rho \to 0$ *йдуть до певних скінченних границь.* Далі, використавши вищенаведену Ейлерову рівність, Чебишов установлює формулу:

$$\ln \rho - \sum \ln \left(1 - \frac{1}{p^{1+\rho}} \right) = \ln \left[1 + \rho + \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

* Ibidem.

де перша сума поширюється на всі первісні числа p, за винятком 1, і доводить, що *різниця*

$$f_1(\rho) = \ln\rho - \sum \ln\left(1 - \frac{1}{p^{1+\rho}}\right) \qquad (2)$$

і всі її похідні по ρ *теж мають скінченні границі. Нарешті*, те саме доводиться щодо функцій:

$$f_2(\rho) = \sum \ln\left(1 - \frac{1}{p^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{p^{1+\rho}} \qquad (3)$$

для кількості первісних чисел, менших за x.

У цьому плані спроб точнішої розв'язки питання слід відзначити насамперед дальші досліди самого Чебишова; геніальні, досі ще повно недоведені, догадки Рімана, зв'язані з властивостями аналітичної функції

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots,$$

продовженої з обсягу додатних чисел більших за 1 в загальний обсяг комплексного змінного, та праці сучасних математиків Адамара, Валле-Пуссена, Літлвуда, Ландау й інших. В кінці наводимо, як зразок сили ідейного впливу Ейлера на своїх наступників, зосібна на Чебишова, у цьому питанні, вказівку на потребу вивчення зв'язку між сумами:

$$\sum \frac{1}{p^n} \text{ та } \sum \frac{1}{m^n}$$

«Хоч закон, за яким ідуть первісні числа, невідомий, проте, нетрудно приблизно одержати суму скількинебудь високих степенів цих рядів»*. Справді, нехай маємо ряд:

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots$$

та наступний

$$S = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots,$$

тоді

$$S = M - 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{8^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \ldots$$

---

* Рядів $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots = \sum \frac{1}{p^n}$.

А що

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + ...,$$

то

$$S = M - \frac{M}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - ...$$

або

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - ...$$

А що

$$M\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + ...,$$

то дістанемо:

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{25^n} - ...$$

Отже, коли знаємо суму M, то легко знайдемо значення S, аби n було число досить велике.

Вкінці, коли знайдено суми вищих степенів, можна також, за допомогою попередніх формул*, визначити суми нижчих степенів; саме цим способом ми дістали наступні суми ряду:

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + ...$$

Сума ряду буде:

Коли

$$n = 2 \quad 0,4522474200041222$$

$$n = 4 \quad 0,076993139764282$$

і т. д. аж до

$$n = 36$$

Попередні формули, що на їх посилається Ейлер, є результат логарифмування рівності:

$$M = \frac{1}{\prod\left(1 - \frac{1}{p^n}\right)},$$

* Подаємо їх після наведеної нижче таблиці.

що дає:

$$\ln M = \sum \frac{1}{p^n} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2n}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{p^{3n}} + ...,$$

а при великому n наближено:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^n} \sim \ln \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \qquad (4)$$

Сам Ейлер установив рівність:

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} = \ln N + \text{const}$$

Чебишов дав, як уточнення рівності (4) при $n = 1$, такий результат:

$$\sum_{p=2}^{p\leq N} \frac{1}{p} = \ln \ln N + \text{const}$$

Вкінці спинімося на тому блискучому використанні Ейлерових думок, що його дав Лежен-Діріхле у доводі теореми: у кожному класі чисел по даному модулю, взаємно простих з тим модулем, є безліч первісних чисел. Взявши для простоти за модуль первісне число q, Лежен-Діріхле розглядає Ейлерового типу рівність:

$$\frac{1}{\prod\left(1 - \dfrac{\varepsilon^{\operatorname{ind} p}}{p^n}\right)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\operatorname{ind} m}}{m^n}, \quad m \not\equiv 0 \pmod q, \qquad (5)$$

де ε є корінь рівняння

$$\varepsilon^{q-1} = 1,$$

а $\operatorname{ind} p$ та $\operatorname{ind} m$ у показниках є індекси відповідних чисел, взяті для будьякого первісного кореня g конгруенції

$$g^{q-1} \equiv 1 \pmod q$$

Таким чином, на правій стороні рівності (5) постає сума типу:

$$\varepsilon \sum \frac{1}{m_1^n} + \varepsilon^2 \sum \frac{1}{m_2^n} + ... + \varepsilon^{q-1} \sum \frac{1}{m_{q-1}^n},$$

де m_s є всі числа конгруентні з S по модулю q. Взявши всі $q-1$ рівностей типу (5) і поклавши $n \to 1$, надзвичайно тонкими міркуваннями Діріхле вивів, що прості числа p розподіляються приблизно «рівномірно» по класах $\text{modulo}\, q$.

Цей апарат використано в різних важливих питаннях теорії чисел, а досліди в цьому напрямі тривають і нині.

Нарешті, не можна не згадати, що від Ейлера ведуть початок майже всі дослідження з так званої аддитивної. теорії чисел, де, як характерні задачі, можна назвати такі: представити будьяке ціле число, як суму певної кількості простих чисел або як суму певної кількості квадратів. В славетному Ейлеровому творі Commentationes arithmeticae доведено вперше Ферматову догадку, що всяке натуральне число є сума чотирьох квадратів. У XX ст. Гільберт узагальнив цю теорему, довівши Уорінгову догадку, що всяке число є сума певної кількості $\psi(n)$ n-х степенів натуральних чисел. В нових часах особливо посунув цю ділянку науки індуський математик Празад.

[5]Понад двісті років минуло з початку блискучої діяльності Ейлера. Більшість його сучасників математиків тепер уже забуті. Але ім'я Ейлера і тепер не тільки посідає почесне місце в історії науки, а й на протязі цих двохсот років набувало щораз більшого блиску поруч поглиблення й розвитку його геніальних ідей, що й досі не втратили своєї актуальності, свіжості й сили впливу на роботу нових поколінь математиків.

Особливе виховне та евристичне значення має читання Ейлерових творів ще тому, що Ейлер викладає свої досліди з великими подробицями, з детальним виявом ходу думок, з великою кількістю варіантів. Сучасні математики в своїх публікаціях не держаться цього звичаю, наслідуючи стилем свого викладу скоріше класиків античної математики. Тому для читача лабораторія наукової думки сучасного ученого буває раз-у-раз скрита.[6]

Отже для нашого сучасного молодого покоління математиків читання Ейлера є в значній мірі школа методики та методології наукової математичної творчості.

МАТЕМАТИКА ТА МАТЕМАТИКИ В КИЇВСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ ЗА СТО РОКІВ (1834–1934)*

Єдиною вищою школою в Києві до заснування університету (1834) була духовна академія, заснована на початку XVII-го століття. Були часи, коли в академії працювали досить видатні професори, фахівці з математичних наук, що стояли в деяких ділянках на рівні сучасних їм досягнень науки; із таких постатей можна у XVIII-му столітті назвати математика *Фальківського*.

Але, з часом, поволі міняючи своє обличчя, академія перетворилася з вищої школи загальноосвітнього типу, керованої, правда, клерикальними колами,— у виховний та ідеологічний центр православної церковщини на Україні, що привело до занепаду її наукового рівня. Так, наприклад, відомо, що *В. Чехович*, професор Київської академії, закликаний 1837 року для викладання фізики в університеті, у своїх лекціях не виходив за межі тодішнього елементарного курсу — відповідно до рівня навчання в академії, і після нього залишилися записи багаторічних метеорологічних спостережень, але й вони, через свою неточність, мало придатні для наукових потреб.

Відомо, що при тодішньому напрямі національної політики, уряд Миколи I-го з охотою використав би математичні сили академії, замість кликати професорів-поляків з Кремінця, але, очевидно, на той час у Києві в академії не було навіть таких маленьких математичних сил як Чехович у галузі фізики. Можна вважати, що із заснуванням університету математичну наукову культуру в Києві почали плекати на цілині. Ні математичних наукових традицій, ні математичного середовища в Києві в той час не було.

---

* 1. К.: Вид-во КДУ. — С. 34–69.

2. Михайло Кравчук. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — НТУУ «КПІ», 2000. — 232 с.

Період 1. Коментатори (1834–1852)

Отже не дивно, що всі математики — професори та викладачі Київського університету в перших десятиріччях його існування — не його вихованці і не кияни.

Це були: *С. Вижевський* та *Г. Гречина* (професори математики), вихованці Віленського університету та професори Кременецького ліцею, переведені до Києва разом з іншою професурою того ліцею; перший з них пішов у відставку 1837 р., вислуживши, 25 років, другого з національно-політичних міркувань переведено до Харкова 1838 р., де він невдовзі (1840) помер; *Н. Гренков* (викладач математики) та *А. Тихомандрицький* (професор математики) — вихованці Головного педагогічного інституту в Петербурзі; *М. Дяченко*, *А. Дяченко* (професори математики) — вихованці Харківського університету; із них довше були зв'язані з університетом *Тихомандрицький* (1838–1848) та *М. Дяченко* (1839–1867); *В. Федоров* (професор астрономії) — з Дерпта.

Ті відомості, що про них залишилися, характеризують їх, як значних ерудитів, добрих лекторів та знавців класиків математики 18-го та початку 19-го століть. Особливо визначався і формою і солідним змістом своїх лекцій С. Вижевський.

Рішучу прихильність усі вони виявили до прикладної математики. У своїх лекціях вони орієнтувалися на курси видатних авторів — *Лякруа*, *Біо*, *Коші* та на спеціальні твори славетних учених: *Монжа*, *Коші*, *Фур'є*, *Пуасона*, *Лягранжа*, *Лапласа*, *Якобі*, *Остроградського* та інших.

Друкованих праць після них залишилося дуже мало; після *С. Вижевського* та *Д. Дяченка* — нічого. Дисертації *А. Дяченка* («Об особенных решениях дифференциальных уравнений», 1850 та «О кривизне поверхностей», 1851), *Г. Гречини* («О капилярном действии», 1838), *В. Федорова* («О точности определения географического положения пунктов, видимых из значительной дали», 1838); були подані в рукописах, і, мабуть, самі автори не так високо їх цінили, щоб домагатися їх опублікувати. Докторська дисертація *А. Тихомандрицького* («Решение двучленных уравнений», 1841), є викладом відомих на той час результатів, що належали переважно *Якобі*.

Наводимо тези першої математичної дисертації, обороненої в Київському університеті:

«Положения, извлеченныя из рассуждения: о капиллярном действии, которые будет защищать в публичном собрании императорского университета св. Владимира 9 ноября 1838 г., для получения звания доктора математических наук, магистр философии, экстра-ординарный профессор чистой и прикладной математики Григорий Гречина.

I. Возвышение и положение жидкостей в волосных трубках есть следствие частичного действия. II. Взаимное притяжение и отталкивание тел, плавающих на поверхности жидкостей, происходит от частичного действия. III. Частичная аттракция совершенно различна от Ньютоновой аттракции. IV. Если жидкая масса находится в равновесии, то будет равновесие и во всяком внутреннем, бесконечно тесном канале, выходящем двумя своими концами на свободную поверхность этой массы. V. Формулы дифференциального и интегрального исчисления соответствуют закону непрерывности в изменениях величин и потому доводят в приложениях до точных результатов. VI. Приложение математического анализа к изъяснению физических явлений наиболее может удостоверить в справедливости начал, на которых изъяснение основывается».

Подаємо зміст деяких університетських курсів тих часів, взятий із звітів професури:

I. Алгебричний аналіз (проф. *М. Дяченко*).

Розділ коренів способами *Штурма* та *Фур'є*. Обчислення коренів способом ланцюгових дробів, способом Ньютона з поправкою Фур'є. Визначення недійсних коренів. Симетричні функції. Розв'язання систем рівнянь. Спосіб неозначених коефіцієнтів та його застосування. Теорія рекурентних рядів. Розклад раціональних функцій на елементарні дроби. Збіжність рядів. Функції подібні та неподібні. Розв'язання рівнянь 3 та 4 степеня в радикалах. Неможливість загального розв'язання рівнянь у радикалах. Розв'язання двочленних рівнянь та неозначених рівнянь 1 і 2 степеня.

II. *Динаміка* (проф. *А. Тихомандрицький*).

Загальний спосіб інтегрувати частинні диференціальні рівняння динаміки, що базується на варіації довільних сталих; загальні властивості руху системи тіл. Вільний рух матеріальної точки в середовищі з опором по кривій лінії та по поверхні. Рух планет та комет. Рух незмінної системи довкола непорушної лінії, точки та вільний. Моменти інерції. Співудар тіл. Рух рідин нестисливих та пружних; витікання їх із посудин та-поширення хвилястого руху в пружних середовищах.

Давалися практичні застосування.

III. *Теоретична астрономія* (проф. *Федоров*).

Прилади для визначення часу та вимірювання кутів. З'ясування астрономічних термінів. Видимий обертовий рух небесної сфери. Вигляд та форма землі і астрономічне заломлення променів. Власний рух сонця та місяця і явища, що доводять їх сферичність та обертовий рух. Планети з їх сателітами та комети. Аберація світла.

Уся діяльність — і педагогічна, і наукова — цієї першої групи Київських університетських математиків зводилася на популяризацію та коментарії результатів, здобутих зусиллями наукових корифеїв *попередніх* поколінь, результатів не сьогоднішнього дня в науці. Київ у ті часи був досить глухий кут з погляду політичного, громадського і культурного життя; тим то цілком пасує до загального його обличчя тих часів відірваність його математиків від тодішньої математичної сучасності: ми не зустрічаємо тут ніяких відгуків ні на геніальні ідеї *Абеля* та *Якобі* в теорії еліптичних функцій і їх узагальнень, ні на глибокі концепції *Галюа* щодо алгебричного розв'язування рівнянь, ні на революційну роботу геометричної думки в творах *Лобачевського*, ні на епохальні результати *Лежен-Діріхле* та *Чебишева* про розподіл простих чисел тощо. Ми не бачимо тут участі в поточних зусиллях світової математичної думки, навіть будь-якого помітного наукового зв'язку з її центрами; це тим більше вражає, що дехто з цих діячів вийшов із петербурзької математичної школи (*Гренков*, *Тихомандрицький*), де ще живі були традиції славетного *Ейлера*, де в ті часи працювали такі великі постаті, як *Буняковський*, *Остроградський*, *Чебишев*. Виняток становить хіба один *В. Федоров*, що підтримував зв'язки із своїм учителем, відомим астрономом *Струве*. Взагалі *Федорова* треба визнати за найвизначнішу постать у цій групі. В історії університету залишиться його ім'я, як основоположника астрономічної обсерваторії та піонера у висуванні вихованців університету на наукову роботу по лінії математичних наук: першими такими науковцями були астрономи-спостерігачі *Полухтович* (1843–1852) та *Пилипенко* (1852–1857).

Актова промова *М. Дяченка* на університетському святі 1851 р. («О влиянии дифференциального и интегрального исчисления на успехи геометрии и механики», 1852) і замітка *В. Федорова* про затемнення сонця («О мерах, какие со стороны астрономической обсерватории университета св. Владимира приняты были для наблюдения солнечного затмения, бывшего 16/28 июля 1851 г.», 1852) являють собою останні дати цього періоду, хоч окремі його представники (*М. Дяченко*, *А. Тихомандрицький*) пережили цю добу на десятки років.

Період 2. Компілятори (1852–1870)

Бідність творчої думки попереднього покоління математиків не сприяла виявленню молодих талантів споміж студентства. Проте, наступні два десятиліття висувають із вихованців Київського університету дві більші постаті, що стають на довгий час головними фігурами в київському математичному світі,— *М. Ващенка-Захарченка* та *П. Ромера*. Але більшість представників київської математики цієї доби, і серед них найвидатніші, належать ще до вихованців інших університетів.

Як найбільшу постать тих часів, слід відзначити *І. Рахманінова*, вихованця Московського університету, професора прикладної математики в Києві з 1853 р. Він продовжив традицію прикладного напряму в київській математиці, так певно виявленого на протязі всього попереднього періоду.

Крім того, як характерні постаті цього періоду, слід назвати професора астрономії *А. Шидловського*, вихованця Харківського та Дерптського університетів і Пулковської астрономічної обсерваторії, *І. Востокова* (Петербург) астронома-спостерігача та професора-астронома *І. Федоренка* (Харків).

Ці десятиріччя можна схарактеризувати, як добу компілятивних дисертацій та перших великих друкованих університетських курсів, що в свій час стояли на рівні останніх досягнень науки.

Докторська дисертація *І. Рахманінова* («Основания теории относительного движения и некоторые ее приложения, как примеры», 1856) лишилися в рукопису.

Дисертації *П. Ромера* («Теория выделения корней алгебраических уравнений», Киев, 1861, та «Основные начала метода кватерненов», Киев, 1866–67) мають цілком компілятивний характер. У вступі до першої автор сам пише:

«В изложении в сей теории вообще я придерживался преимущественно работ Коши, изменяя там только доказательство некоторых теорем, где через это, по моему мнению, можно было выиграть в аналитическом характере и ясности исследования».

Те саме стосується дисертацій *М. Ващенка-Захарченка* («Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений», Киев, 1862, та «Риманнова теория функций составного переменного», Киев, 1866–1867, «Унив. Известия»). В другій дисертації автор наводить основну літературу питання, кінчаючи 1865 р., але й не намагається розв'язати або поставити якусь нову проблему.

Наводимо останній параграф докторської дисертації *Ващенка-Захарченка*:

§ 95. Перейдем к эллиптическому интегралу:

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-K^2Z^2)}} \qquad (1),$$

Приложением подъинтегральной функции служит *Риманова* поверхность, составленная из двух шаров, сшитых по линиям, соединяющим точки $+1$ и -1, $+\frac{1}{K}$и $-\frac{1}{K}$. В § 59 пр. 4 мы видели, что этот интеграл около точек $+1, -1, +\frac{1}{K}, -\frac{1}{K}$ равен нулю, так же точно, как и около точки $+\infty$ и $-\infty$. Следовательно исключать эти точки проколами из поверхности приложения нет надобности.

В том же § мы видели, что интеграл (1), взятый по замкнутой кривой A, огибающей точки $+1$ и -1 равен $4K$, где K есть интеграл

$$\int_0^1 \frac{dZ}{\Delta(\mathrm{Z},\mathrm{K})} = K,$$

а взятый по замкнутой кривой B, огибающей точки $+1$ и $+\frac{1}{K}$, равен $-2K'i$, где K' есть интеграл

$$\int_0^1 \frac{dZ'}{\Delta(\mathrm{Z}',\mathrm{K}')} = K'.$$

Если теперь поверхность приложения, которая есть трехсложная, преобразуем двумя разрезами в односложную, то всякий раз, когда переменное z перейдет в разрез один или другой, интеграл (1) получит приращение $4K$ или $2iK'$, этот переход, как мы видели выше, есть не что иное, как полный оборот по одному из разрезов; переход через первый разрез равен полному обороту по второму разрезу и обратно.

Если интеграл (1) означим через v, т. е. положим

$$\int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)} = v = \varphi(z),$$

то обратная функция $\varphi(z)$, которую означают символом $\operatorname{Sin} amv$, будет двойная периодическая, т.е. мы будем иметь

$$\operatorname{Sin} am\,(v+4nk) = \operatorname{Sin} am\ v;\ \operatorname{Sin} am\ \Big(v+2mki\Big) = \operatorname{Sin} am\ v$$
$$\operatorname{Sin} am\Big(v+4nk+2mki\Big) = \operatorname{Sin} am\ v,$$

где n и m суть какие-нибудь целые положительные или отрицательные числа».

Хоч ці дисертації ні в якій мірі не є самостійним дослідженням, проте, вони не раз трактують, правда не глибоко, питання, що стоять на порядку денному в науці, беруться до теорій незакінчених, з перспективами на дальший розвиток.

Університетські друковані курси цих діячів (*Ващенка-Захарченка*, *Шидловського*, *Рахманінова*), написані здебільшого з використанням найновішої навчальної та наукової літератури, свідчать про досить високий рівень тодішнього викладання математичних наук на факультеті. Деякі представники цього покоління, особливо *Ващенко-Захарченко*, виявляють велику та різноманітну ерудицію: *Ващенко-Захарченко* був неабияким знавцем різних відділів алгебри, аналізу, теорії функцій, різницевого числення, геометрії, історії математики тощо.

Подаємо тут перелік (неповний) друкованих курсів київських математиків цього покоління:

Рахманінов І.: Основания теоретической динамики, почато р. 1870. *Шидловський*: Руководство к сферической астрономии по сочинениям Брюннова, Шовене и других, почато р. 1866. *Ващенко-Захарченко*: Лекции разностного исчисления, почато р. 1867. Теория определителей и теория форм, ч. I. «Теория определителей», ч. II. «Теория двойничных форм», почато 1875 р. Аналитическая геометрия двух измерений, 1883. Аналитическая геометрия трех измерений, 1883. Алгебраический анализ, 1883. Краткий курс теории определителей, 1883. Аналитическая геометрия двух и трех измерений, 1884, 1887. Теория функций, почато 1885. Алгебраический анализ или высшая алгебра, 1887. Вариационное исчисление, 1889. Теория подстановлений и приложение ее к алгебраическим уравнениям, 1899. Проэктивная геометрия, почато 1895 р. Высшая геометрия, 1895. Курс проэктивной геометрии, 1897.

Математики Київського університету цього другого періоду вже намагаються вийти з тісного провінціального київського кутка, зв'язатися своїми працями з великими центрами математичної думки. Напр., *І. Рахманінов* друкує свої праці в «Journal des Mathématiques pures et Appliquées», в «Zeitschrift für Mathematik und Physik», у петербурзьких та московських виданнях; *Ващенко-Захарченко* друкується в «Quaterly Journal of pure and applied Mathematics», у «Математическом сборнике», у «Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux». *Рахманінов*, *Ромер*, *Ващенко-Захарченко* беруть участь у наукових з'їздах, не раз бувають у наукових закордонних відрядженнях. *Шидловський* та *Ващенко-Захарченко* були членами закордонних наукових товариств.

Безперечно, наукова думка в цьому періоді пожвавлюється, а викладання університетських курсів модернізується. *Ващенко-Захарченко* з цього приводу пише в своєму життєпису: «В своих лекциях проф. *Ващенко-Захарченко* обращал особенное внимание на знакомство своих слушателей с новейшими методами. Читая в продолжение многих лет аналитическую геометрию, он обращал особенное внимание на все новейшие методы; как, напр., двойственность, проэктивность, ангармония, инволюция и т.п. Желая возбудить в своих слушателях интерес к некоторым из современных вопросов, занимающих многих математиков и составляющих предмет их исследований, как, напр., вопросы, относящиеся к исследованиям пространств многих измерений, проф. *Ващенко-Захарченко* в 1878–812 гг. уделял по 1 часу в неделю на чтение неевклидовой геометрии и знакомство своих слушателей с критическим разбором первоначальных основ геометрии и со всеми новейшими исследованиями ученых по этому предмету. Особенное внимание он обращал на уяснение геометрического смысла и значения системы *Лобачевского* и *Болея*».

У планах викладання факультету з'являються нові курси: теорія чисел, еліптичні функції. Це піднесення йде паралельно зростанню університету і в інших наукових ділянках; тут позначився політичний, культурний та науковий рух 60-х років у колишній Росії, не вважаючи на реакційність або аполітизм факультетської професури (*Дяченко*, *Ващенко-Захарченко*). Хоч більшість із названих представників цього періоду набагато його пережили (напр., проф. *Ващенко-Захарченко* читав лекції ще на початку 20-го століття), хоч може більша частина коли не наукової, то літературної їх продукції датується 70-ми та 80-ми роками XIX-го століття — проте, в їх роботі до кінця збереглася характерна риса цього другого періоду: поруч видатного ерудитизму — незначність самостійних творчих зусиль. Вона виявилася і в ділянці досить далекій від математичної наукової творчості: *Ващенко-Захарченко*, бувши знавцем історії математики, написав з неї низку великих праць, але не зробив жодного самостійного історичного досліду, обмежився і тут писаннями характеру компілятивного.

Як виняток тут з найбільшим правом можна вважати *І. Рахманінова*; його наукова діяльність, маючи елементи оригінальності, може, з більшим правом могла б бути щодо свого характеру віднесена до наступного, третього періоду.

Вміщаємо далі ту частину «Обозрения преподавания в университете св. Владимира во втором полугодии 1866–67 учебного года», що стосується «разряда математических наук»:

III. Лекция физико-математического факультета.

. . . .

2. Ординарный профессор *Андрей Петрович Шидловский* читает: 1) сферическую астрономию, по 2 часа в неделю, для студентов 5 и 6 семестров; 2) геодезию, по 2 часа в неделю, для студентов 7 и 8 семестров; 3) практическую астрономию, по 2 часа в неделю, для студентов 5, 6, 7 и 8 семестров.

. . . .

6. Ординарный профессор *Иван Иванович Рахманинов* читает: 1) гидростатику, по 2 часа в неделю, для студентов 5, 6 семестров разряда математических наук; 2) гидродинамику и практическую механику, по 4 часа в неделю, для студентов 7 и 8 семестров того же разряда.

. . . .

8. Экстраординарный профессор *Михаил Петрович Авенариус* читает: 1) общую физику, по 4 часа в неделю для студентов 1 и 2 семестров физико-математического и медицинского факультетов; 2) теорию электричества, по 1 часу в неделю, для студентов 5, 6, 7 и 8 семестров разряда математических наук.

9. Исправляющий должность экстраординарного профессора *Иван Артамонович Тютчев* читает неорганическую химию, по 4 часа в неделю, для студентов 1 и 2 семестров физико-математического и медицинского факультетов.

10. Доцент *Павел Эмилиевич Ромер* преподает: 1) алгебраический анализ, по 2 часа а неделю, для студентов 1 и 2 семестров разряда математических паук; 2) аналитическую геометрию, по 2 часа в неделю, для тех же студентов.

. . . .

12. Приват-доцент *Михаил Егорович Ващенко-Захарченко* излагает: 1) теорию чисел, по 3 часа в неделю, для студентов 1, 2, 3 в 4 семестров разряда математических наук; 2) математическую теорию вероятностей, по 2 часа в неделю, для студентов 7 и 8 семестров того же разряда».

(«Университетские известия», №12, 1866).

Із вихованців Київського університету тих часів треба відзначити астронома-спостерігача *О. Громадзького*, що разом з *Шидловським* попрацював над дальшим удосконаленням астрономічної обсерваторії.

Період 3. Творче зростання (1870–1890)

Київським професорам-математикам 50-х та 60-х років бракувало, їх і їх попередникам, творчої ініціативи та наукового ентузіазму, вони заспокоїлися на позиціях наукового знання і не дбали про власні наукові здобутки; вони освоювали сьогоднішній день науки, але не творили її. Певна річ, це не сприяло здобуттю та вихованню учнів, утворенню школи наукової молоді. І справді, в наступних двох десятиліттях (1870–1890) математичної школи в Києві не утворилося. Проте, цей третій період треба особливо відзначити, як добу, коли вперше серйозно почали виявлятися творчі сили математиків — вихованців Київського університету.

Цей третій період починається блискучим дебютом молодого професорського стипендіата (аспіранта) *В. Єрмакова*, що дав 1870 р. нову важливу ознаку збіжності рядів, відому й досі в літературі під назвою: ознака збіжності Єрмакова. Найвидатніші математики колишньої Росії тих часів, серед них *П. Чебишев*, *Коркін*, *Золотарьов*, поставилися з великим інтересом до праці молодого автора, обмірковували її в своєму листуванні, визнали її за подію в науковому світі; вперше київська математика звернула на себе увагу наукових авторитетів. Праці Єрмакова, присвячені цьому питанню («Общая теория сходимости рядов»; «Новый признак сходимости и расходимости безконечных знакопостоянных рядов»), надруковано в «Математическом сборнике» (Москва, 1870), в «Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques» (1870), у київських «Университетских известиях» (1872). Вважали якийсь час (і сам *Єрмаков* був такої думки), що ознака Єрмакова є, до певної міри, в застосуванні до монотонних рядів, цілком загальна, тобто виключає сумнівні випадки, що фігурують в усіх ознаках збіжності, крім достатньої і конечної ознаки Больцано — Коші. Наводимо тут витяг з праці В. Єрмакова («Унив. известия», № 8, 1872, с. 87 і далі):

«Вопрос о сходимости и расходимости знакопостоянного убывающего ряда:

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots$$

по теореме Коли сводится к определению, будет ли определенный интеграл:

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{1}$$

величиною конечною или бесконечно-великою. Займемся здесь решением этого вопроса.

Возьмем какую-нибудь функцию $\varphi(x)$, которая для всех величин x, превосходящих некоторое положительное число, была бы постоянно положительна и удовлетворяла неравенство $\varphi(x) > x$. Из этого определения следует также, что $\varphi(\infty) = \infty$.

Функцию, таким образом определенную, мы назовем *сопряженною функцией первого рода*. Таких функций есть бесчисленное множество, напр.

$$x + 1, 2x, x^2, e^x \tag{2}$$

Докажем теперь, что *определенный интеграл (1) будет величиною конечною, если отношение*:

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \tag{3}$$

возрастанием x до ∞ стремится к пределу меньшему единицы, и бесконечно великою, если отношение (3), для величины x, превосходящих некоторое постоянное положительное число, постоянно больше или равно единице.

. . . .

Кроме двух указанных случаев, может быть еще третий: отношение (3) для величин x, превосходящих некоторое постоянное положительное число, может быть меньше единицы и с возрастанием x до ∞ стремится к единице. В этом случае определенный интеграл может быть как величиною конечною, так и бесконечно-великою; поэтому этот случай называется сомнительным»……

«……наилучшее правило сходимости будет следующее:

Ряд

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \ldots$$

будет сходящийся, если отношение

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \tag{1}$$

с возрастанием x до ∞ стремится к пределу меньшему единицы, и расходящийся, если отношение (1) для величин x, превосходящих некоторое постоянное положительное число, более или равно единице.

Сомнительный случай может быть только тогда, когда отношение (1) для величин x, превосходящих некоторое постоянное число меньше единицы и с возрастанием x до ∞ стремится к единице. Замечательно, что предел отношения (1) для всех родов, встречающихся в анализе, равен нулю или бесконечности и невозможно (! *М. К.*) отыскать такой функции $f(x)$, чтобы предел отношения (1) был бы величиною конечною. Таким образом на практике никогда не встречается сомнительного случая, хотя теоретически доказать это трудно и вряд ли возможно.

Желающие подробно ознакомиться с этим предметом, могут обратиться в Московский математический сборник за 1872-й год, где показано, что данный нами признак сходимости чувствительнее всех доселе известных признаков».

Проте, вже в звіті про закордонне відрядження 1872 року («Унив. известия», №1, 1874) він пише:

«Оставалось еще показать: существуют ли сомнительные ряды для моего признака или нет. Скоро по приезде в Берлин я отыскал такой сомнительный ряд для моего признака. Ряд этот можно составить следующим образом. Пусть *x* произвольное положительное число, означим через ξ наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству: $\log \xi(x) \geq 1$, где логарифмы берутся по основании *e*. Составим теперь функцию:

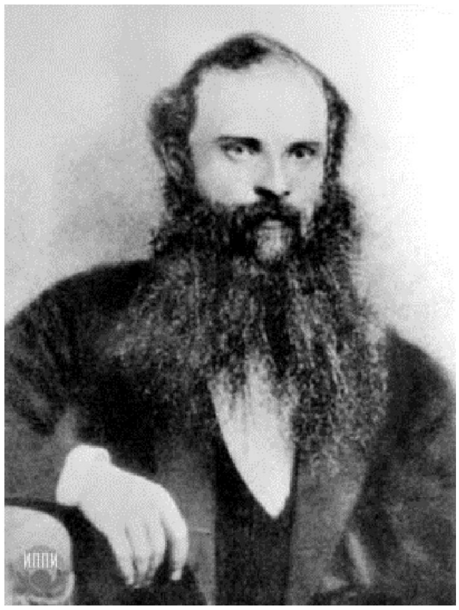
$$\Theta(x) = \prod_{k=0}^{k=\xi} \frac{1}{\log^k(x)}$$

Ряд $\Theta(0) + \Theta(1) + \Theta(2) + \Theta(3) + \ldots$ даст сомнительный случай для моего признака, ибо функция $\Theta(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$e^x\Theta(e^x) = \Theta(x)^n».$$

Простота, своєрідність та ефективність результату, широкий його відгомін у математичному світі — дають право цим моментом датувати початок утворення в Києві осередку математичної думки.

В. П. Єрмаков народився 1845 року на Чернігівщині. Середню освіту здобув у Чернігівській гімназії 1864 р., вищу у Київському університеті; 1868 р. закінчив із ступенем кандидата математичних наук. Тоді відбув при університеті аспірантуру (1868–1871), був у науковому відрядженні в Німеччині (1871–1873), 1874 р. оборонив магістерську дисертацію, а року 1877 — докторську. Кілька десятків років *В. Єрмаков* — професор Київського університету, а пізніше Вищих жіночих курсів та Київського політехнічного інституту. Помер 1922 р.



Проф. В. П. Єрмаков

Наукова діяльність його обіймає понад півстоліття, але найцінніші праці належать переважно до розгляданого третього періоду київської університетської математики. Вони стосуються диференціальних рівнянь — звичайних та з частинними похідними (дисертації «Общая теория интегрирования линейных частных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами», «Интегрирование дифференциальных уравнений механіки»), теорії функцій комплексного змінного, теорії ймовірностей, варіаційного числення, алгебри, різних розділів геометрії, механіки, аналізу та багатьох інших обсягів.

Для наукових його праць характерні — глибина критичного погляду, велика самостійність та своєрідність думки, але разом із тим — брак уваги до чужих результатів, недооцінка чужих шляхів досліду, гіпертрофована тенденція спрощувати їх, відсутність доброї наукової школи.

Безперечно, серед відданих на суд історії математичних постатей Київського університету Єрмаков — найбільша. Коли б він мав добру школу, великих учителів, то вій міг би, завдяки своєму видатному талантові, лишити в науці спадщину такого масштабу, як *Жорданова*, або *Кляйнова*. Через несприятливі умови розвитку та наукового виховання не довелося й *Єрмакову*, не вважаючи на довге та діяльне наукове життя, утворити школу — так само, як не вдавалося це київським математикам двох попередніх поколінь. *Єрмаков* присвячував багато уваги справам викладання математики вищої та елементарної. Крім великої кількості друкованих університетських курсів, він утворив курси аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення для технічних вишів, що в свій час відіграли велику роль, але тепер уже не задовольняють ні добором матеріалу, ані викладом, занадто примітивним. Дотепні, але не раз парадоксальні думки *Єрмакова* щодо наукової та навчальної роботи ще досі живуть в усній традиції киян-математиків (деякі з них фігурують і в його працях). Він твердив, що для мудрого математика загальна теорія — річ мало пожиточна, і блискуче доводив це своїми формами остач тейлорових розвиненнях елементарних функції. Він запевняв, то найкращі лекції ті, до яких професор не готується, бо тоді він мусить, із сорому перед аудиторією, придумати свій оригінальний довід теореми, замість забутого книжного. Він радив, замість читати науковий твір, зразу заглядати в кінець, а тоді старатися самому довести його результати.

Наводимо тут розвинення в степеневі ряди деяких функцій з остачами в формі Єрмакова («Унив. изв»., № 5, 1904, Остаточные члены простейших рядов).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + ... + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2...(n-1)} + \frac{x^n}{1\cdot 2...(n-1)(n-\theta x)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} ... \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \pm \frac{x^n}{n(1+\theta x)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ... + \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 ... (2n-1)} \pm \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 2 ... (2n-1)(2n+1+\theta x^2)}$$

Гіпергеометричний ряд:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{1 \cdot 2\gamma(\gamma+1)} x^2 + ... +$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)...(\alpha+\mathrm{n}-2)(\beta+\mathrm{n}-2)}{1 \cdot 2...(n-1)...\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-2)} x^{n-1} +$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)...(\alpha+\mathrm{n}-1)(\beta+\mathrm{n}-1)}{1 \cdot 2...(n-1)...\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-2)} q x^n,$$

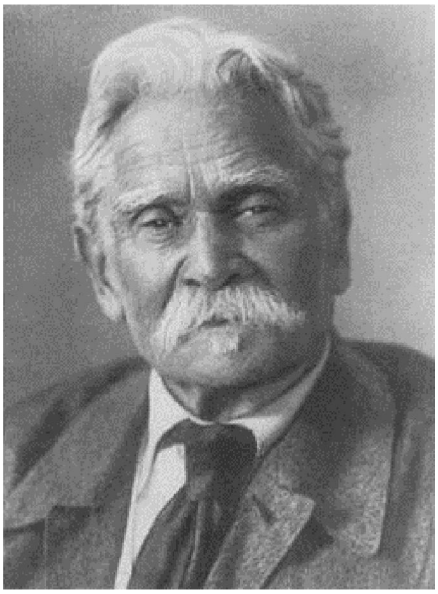
де

$$q = \frac{1}{n(\gamma+n-1) - (\alpha+n)(\beta+n)\theta x}$$

Тут скрізь $0 \leq \theta \leq 1$.

Із інших видатних постатей, типових для цього періоду, треба насамперед відзначити молодшого товариша *Єрмакова* і почасти його учня, нашого вчителя — професора *Б. Я. Букреєва.* 50-річний ювілей його діяльності в університеті як педагога та вченого, припав якраз на сторіччя самого університету. В зв'язку з цим окремим святкуванням університет та київська математична громадськість присвячує *Б. Я. Букреєву* спеціальні розвідки та статті, де докладніше замальовується його наукові здобутки та його роль в розвитку математичної науки в Києві. До вісімдесятих років 19-го століття належать роботи *Б. Я. Букреєва* з теорії функцій комплексно-змінного («Аналитическое выражение однозначных функцій», 1884, «О разложении трансцендентных функций в частные дроби», 1887 — магістерська дисертація, «О фуксовых функциях нулевого ранга с симметричным основным полигоном», 1889 — докторська дисертація, та багато інших). Вони зв'язані безпосередньо з тими (в той час новими) течіями, що їх становили праці *Ваєрштраса* і *Міттаг-Леффлера*, з одного боку, *Фукса*, *Пуанкаре* та *Кляйна* — з другого.

Із київських математиків — вихованців нашого університету *Б. Я. Букреєву* першому вдалося здобути добру наукову школу під час довгого перебування в Німеччині, де й написана його докторська дисертація. Із німецьких учених, з якими *Б. Я.* входив у безпосередній контакт, особливе значення мав славетний *Фукс*, якого *Б. Я.* ставить на перше місце серед своїх учителів. В передмові до своєї дисертації *Б. Я.* пише: «...заканчивая эти вступительные строки, я считаю своим нравственным долгом, с чувством живой благодарности еще раз вспомнить о проф. *Fuchs-e*. Этот опыт возник главным образом под его влиянием, его частным беседам со мною обязан я развитием во мне того интереса, который я получил к этой новой теории, его советы и указания руководили мною и помогали мне при обработке различных сравнительно более трудных пунктов теории».



Проф. В. П. Букреєв

Поруч самостійних дослідів у загальній теорії функцій комплексного змінного та розробки спеціальних питань (еліптичні функції, автоморфні функції, алгебричні питання в теорії цілих трансцендентних функцій) *Б. Я.* спеціально дбав тримати руку на пульсі новіших досягнень західноєвропейської науки в ділянці теорії функцій та аналізу взагалі. В «Университетских известиях» за ті роки і пізніше він вмістив велику низку глибоких і докладних розборів новин тодішньої літератури з аналізу, що чудово орієнтували тодішнього читача в стані ідей і в перспективах цього широкого обсягу.

Такі його розбори книг: O. Biermann «Theorie der analytischen Funktionen» 1888, L. Königsberger «Lehrbuch der Differentialgleichungen» 1889, H. Laurent «Traité d'analyse» 1890. H. A. Schwarz «Gesammelte mathematische Abhandlungen» 1891, Picard «Traité d'analyse» T. I, 1891, T. II, 1893.

На протязі своєї довгої і плідної наукової діяльності *Б. Я.* працював у багатьох відділах математики. У пізніших періодах він продуктивно працював над геометрією, зокрема, над теорією поверхонь, над питаннями вищої алгебри, варіаційного числення та іншими.

У своїх університетських викладах *Б. Я.* був з давніх часів провідником ідей обґрунтування аналізу відповідно до думок *Ваєрштраса*, *Дедекінда*, та *Кронекера*, розвинених у другій половині XIX віку.

Коли ще в курсах та в лекціях *Єрмакова* ми бачимо наївний геометричний інтуїтивізм XVIII-го віку, коли навіть у спеціальних наукових розвідках *Єрмакова* та його сучасників здибаємо досить безжурне ставлення до таких фундаментальних понять, як границя, нескінченно-мале, нескінченно-велике, до належної точності й загальності формульовок, коли, напр., *Ващенко-Захарченко* вже на початку XX-го віку в брошурі «Опыт изложения дифференциального и интегрального исчисления без помощи методов бесконечно-малых и пределов» (1908) в розумінні основ аналізу деградує на півтораста років,— в той час *Б. Я.* у своїх зразкових лекціях вступу до аналізу нескінченно-малих робить натиск на логічно-розроблені теорії ірраціонального числа, в своїх лекціях диференціального та інтегрального числення приділяє належну увагу *Ваєрштрасовій* теорії суцільних функцій, ідеї одностайності, критичному розборові понять: лінія, площа, поверхня, глибокому аналізові та взагальненню поняття похідної. Таким критичним духом нової математики перейняті його виклади та його наукові досліди, і в цьому попередників серед київських математиків він не має.

Не можна не згадати тут ще про одну велику заслугу *Б. Я. Букрєєва* у боротьбі за математичну культуру в Київському університеті: заснування спеціальної математичної наукової бібліотеки-читальні. Вона називалася бібліотекою математичного семінару і являла собою велику, дбайливо підібрану збірку навчальної, а особливо спеціальної нової та класичної літератури з математики, механіки, математичної фізики, астрономії, почасти й журнальної та довідної. Вона була організована на зразок подібних закордонних бібліотек; читачі (переважно студенти) мали змогу самі брати з полиць потрібні книги для користування на місці. Скільки адептів науки придбала ця бібліотека! Скількком допомогла вона оформити свої перші самостійні математичні думки! *Б. Я.* був довгі роки дбайливим патроном цієї важливої установи, керував її поповненням та обслуговуванням. В ній провадилися раз-у-раз спеціальні семінарські заняття, що таке велике значення мали для утворення Київської математичної школи в XX-му столітті. Класики математики на чолі з *Ейлером* та *Чебишевим* — по стінах цієї установи, бюст *Ваєрштраса* — на центральному місці поміж ними символізували, до певної міри, той напрям, який намагалася взяти пізніше київська математична школа: поєднання тонкого логічно-аналітичного напряму новітньої західної математики з конкретністю проблематики славетної петербурзької школи.

Із інших видатніших постатей 80-х та 90-х років треба відзначити професора астрономії *М. Хандрікова*, вихованця Московського університету, що 1870 р. заступив у Києві проф. *Шидловського*. Він, за прикладом своїх попередників, дбав за дальший розвиток астрономічної обсерваторії. Зокрема, він розпочав видання праць обсерваторії і видав велику «Систему астрономії» (1875–1877) та ряд університетських курсів астрономії. Його праці стосуються різних розділів астрономічної науки і мають деякі риси самостійних дослідів. Щодо праць *Хандрікова* суто математичних, то вони стоять на рівні другого періоду в нашій схемі і нічого не додають до його наукового імені.

Хоч центральні постаті цієї доби в київському математичному світі — *Єрмаков* та *Букрєєв* — уже належать до вихованців нашого університету, але брак власних кадрів на факультеті позначається ще дуже помітно: крім *М. Хандрікова*, другий тодішній астроном *В. Фабріціус* (Пулково), математик *В. Максимович* (Париж), механік *Г. Суслов* (Петербург), з'явилися в Києві уже з готовою науковою кваліфікацією. З них більша роль в дальшій історії київської математики належить спадкоємцеві *І. Рахманінова — Г. Суслову*, учневі відомого петербурзького вченого *Бобильова*. Йому належать праці, що стосуються загальних основ механіки, динаміки твердого тіла, диференціальної геометрії, зокрема просторових кривих ліній та поверхонь, векторного числення.

Наводимо витяг із «Обозрения преподавания в университете св. Владимира в весеннее полугодие 1888 года» (Унив. известия № 12, 1887):

В) Лекции физико-математического факультета.

1) Заслуженный ординарный профессор *П. Э. Ромер* (8 ч.): дифференциальное вычисление, среда и пятница 12 — 2; практические упражнения по дифференциальному вычислению, четверг 12 — 2; практические упражнения по интегральному вычислению, суббота 12 — 2.

Пособия: «Eléments de calcul infinitésimal» par Duhamel 2 édit. 1860–61.

«Cours de calcul infinitésimal» par Houél éd., Paris 1878–1879.

Собрание упражнений и задач Зонке, перевод с 3-го нем. издания, Спб. 1887.

Хмырова Спб. 1888, Brahy, Brixelle 1867, Frenet, 2 éd., Paris 1866.

Совещательный час: среда 2 — 3.

2) Заслуженный ординарный профессор *М. Ю. Ващенко-Захарченко* (8 ч.): аналитическая геометрия двух измерений, вторник 9–11 и суббота 10–11; практические упражнения по аналитической геометрии, четверг 9–11.

Пособия: Изданные в 1887 г. самим профессором курсы аналитической геометрии и алгебраического анализа или высшей алгебры, в которых указаны все пособия.

Совещательные часы: вторник и пятница 11—12.

3) Экстраординарный профессор *В. П. Ермаков* (7 ч.): интегрирование дифференциальных уравнений, понедельник и вторник 12–2, суббота 10–11; практические упражнения по интегрированию дифференциальных уравнений, четверг 10–12.

Пособия: *В. Ермаков*. Дифференциальные уравнения первого порядка с двумя переменными, Киев, 1887; g. Boole «A treatise on differential equations» Cambridge and London 1865, *В. Ермаков*. Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка, Киев, 1884.

Совещательный час: суббота 11–12.

4) Экстраординарный профессор *В. П. Максимович* (7 ч.): вариационное исчисление, вторник 12–2; эллиптические функции, понедельник и пятница 12–1; суббота 1–2; практические упражнения по теории вероятностей, среда 12–2.

Пособия: Todhunter «A history of the progress of the calculus of variations during XIX century» Edit Macmilian and C°; Муаньо, лекции вариационного исчисления, перевод с французского *Раевского* и *Хандрикова*, Москва, 1864; Laurent «Téorie élémentaire des fonctions elliptiques», Paris, 1880.

Совещательный час: суббота 2–3.

5) Заслуженный ординарный профессор *И. И. Рахманинов* (7 ч.): динамика точки, среда 12–2 и пятница 12–1; динамика системы, четверг 12–2; практические упражнения по теоретической механике, пятница 1–3.

Пособия: Курсы теоретической механики *Слудского* и *Бобылева*; «Traité de mécanique rationelle» par Laurent; «Cours de mecanique» par Bour; Schell «Teorie der Bewegung und Krafte»; Tait «A treatise on the dinamics»; Routh «An elementary treatise on dynamics of a system of rigid body».

Совещательный час: четверг 2–3.

6) Ординарный профессор *М. А. Хандриков* (7 ч.): сферическая астрономия, среда и пятница 10–12; теоретическая астрономия, понедельник 10–12; геодезия, суббота 10–11. Практические занятия: будут состоять в упражнении в наблюдениях пассажным инструментом, вертикальным кругом и секстантом. Занятия эти начнутся с первых чисел марта месяца и будут производиться по группам, на которые будут разделены студенты, прослушавшие в прошлом полугодий теорию главнейших астрономических инструментов.

Пособия: сферическая астрономия, *М. Хандрикова*; Очерк теоретической астрономии, *М. Хандрикова*; Руководство высшей геодезии, Иордана, перевод *А. Блока.*

Совещательный час: суббота 11 —12.

7) Ординарный профессор *М. П. Авенариус* (7 ч.): опытная физика (учение об электричестве и магнетизме), понедельник, вторник, четверг и суббота 11–12; *практические занятия* по опытной физике, четверг 10–12 к пятница 10–12. Физический кабинет для занятий студентов открыт ежедневно от 9–4 час.

Пособия: Курс опытной физики *Шимкова*; «Lehrbuch der Experimetal physic» von Wülbier.

Совещательный час: понедельник 12–1.

8) Ординарный профессор *Н. Н. Шиллер* (12 ч.): теория тока, понедельник 1—2 и суббота 11 — 1; краткий курс физики (дли медиков) по 5 часов; *практические упражнения* по механическому отделу физики, вторник 12–1 и суббота 1–2; семинарий по математической физике, вторник 10–12.

Пособия: Leçons sur l'électricité etc. par Mascart et Joubert, Paris, 1882.

Die electrischen Krafte, von C. Neumann, Leipzig 1873. A treatise on electricity and magnetism, by Maxwell. Oxford, 1872.

По общему курсу:

Гано, Курс экспериментальной физики, перевод с франц. Спб., 1870 Любимов, Начальная физика, Москва, 1873.

Совещательные часы; четверг 11–12 и пятница 1–2.

Період 4. Перед першою революцією (Фізико-математичне товариство)

Весь попередній час хибує на брак у Києві та в університеті математичної громадськості, математичного наукового середовища. Тим часом у 80-х роках XIX-го століття київські математики почали досить широко брати участь у русі міжнародної математичної думки, зросли якісно та кількісно. Прийшов час фізикам та математикам утворити своє наукове об'єднання за прикладом наукових товариств, що вже на той час існували при університеті: Історичного «Нестора-літописця», Природничого та Юридичного. Товариство почало функціонувати на початку 1890 року під назвою: «Физико-математическое общество при императорском университете св. Владимира». Серед його членів-фундаторів фігурують *Б. Я. Букрєєв*, *М. Ващенко-Захарченко*, *В. Єрмаков*, *І. Рахманінов*, *П. Ромер*, *Г. Суслов*, *М. Хандріков*, але ветерани другого періоду ніякої ролі в дальшій роботі Товариства не відіграють. Крім діячів третього періоду — *Єрмакова*, *Букрєєва*, *Суслова*, Товариство збирає дуже численне і досить активне молодше покоління.

Подаємо витяг із статуту Товариства:

§ 1.

Физико-математическое общество при императорском университете св. Владимира имеет целью содействовать разработке н распространению физико-математических наук, а также способствовать установлению правильных взглядов их на премирование.

§ 2.

Общество состоит из членов почетных и действительных, как городских, так и иногородних.

§ 3.

Почетными членами Общества избираются известные ученые и лица, оказавшие содействие развитию наук и деятельности Общества

§ 4.

Каждый из профессоров и преподавателей физико-математического факультета университета св. Владимира есть действительный член Общества, буде на принятие итого звания изъявит желание.

§ 5.

Кандидаты в почетные и действительные члены предлагаются письменно в очередных собраниях Общества двумя или более почетными или действительными членами и избираются в следующем собрании закрытою баллотировкою простым большинством голосов.

§ 6.

Делами Общества заведует распорядительный комитет, состоящий из председателя Общества, двух его товарищей, секретаря и казначея.

§ 7.

Распорядительный комитет избирается из действительных членов закрытою баллотировкою, большинством голосов, а особом заседании, для этого назначенном.

Председатель Общества избирается на два года; остальные члены распорядительного комитета избираются на один год.

. . . .

§ 11.

Заседания Общества бывают очередные и неочередные. Один очередные заседания имеют своим предметом обсуждения научных тем общепонятного характера; другие очередные заседания посвящаются темам, более трудным и специальным.

. . . .

§ 15.

Издания Общества, как состоящего при университете, в силу § 138 общего устава императорских российских университетов, выходят в свет без предварительной цензуры.

. . . .

§ 20.

Общество имеет право предлагать и публиковать темы для научных исследований и задачи на премии, определенные Обществом, а также выдавать пособия для научных работ, им одобренных.

З цього видно, що Товариство мало на меті працювати не тільки над розвитком науки, але й займатися питаннями викладання математики та популяризувати наукові знання. Особливо чітко відбився, крім наукового, методичний напрям у роботі Товариства. Досить назвати серед його активних членів за зазначений час такі імена відомих педагогів методистів: проф. *К. Щербина*, проф. *О. Астряб*, *З. Архимович*, *П. Долгушин*, *К. Лебединцев*, *М. Оглоблін*, *Д. Остроменський*, *Попруженко*.

Товариство на протязі часу з 1890 до 1917 року видавало свої «Отчеты и протоколы», де містилися також і повні тексти багатьох доповідей. В перші роки революції, під час громадянської війни його діяльність майже припинилася. Уже з років 1905–1910 Товариство в значній мірі втратило свою роль об'єднуючого математичного осередку та терену для виявлення і виховання наукової молоді: з одного боку, відчулися труднощі об'єднувати фізиків з математиками, з другого — коло часів першої революції біля видатних математиків Києва (*Букреєва*, *Граве*, *Пфейффера*), почали утворюватися гуртки молоді, ближчих учнів-професорових, стипендіатів та студентів; ці дрібні осередки, разом із спеціальними семінарами, досить широко практикованими на факультеті в ті часи, перейняли на себе в значній мірі ту науково-організаційну роль, яку відігравало Товариство на протязі перших півтора десятка років свого існування.

Період 1890–1905 рр. є доба висування на професуру майже виключно вихованців нашого факультету, учнів видатніших діячів третього періоду, насамперед професорів *Єрмакова* та *Букрєєва*, виняток становить один *П. Покровський*, вихованець Московського університету, якого на початок цього періоду можна вважати за оформленого вченого.

Із ділянок науки, що займали математиків нашого університету в попередній період, в четвертому періоді особливо пощастило дослідам над еліптичними функціями, алгебричними функціями та абелевими інтегралами (*Єрмаков*). Майже вся наукова продукція *П. Покровського* належить до цього відділу («Исторический очерк ультраэллиптических функций и абелевых функций» 1886, «Теория эллиптических функций» 1886, «Теорема Абеля и ее значение в теории трансцедентных функций» 1894, «Теорема сложения трансцедентных функций», «Теорема Абеля в новой форме» 1898, тощо). Крім того, продовжувалася робота в різних ділянках теорії диференціальних рівнянь, варіаційного числення (*Єрмаков* «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с алгебраическими интегралами» 1893, «Нахождение рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений» 1894, «Разыскание критических точек в интегралах дифференциальных уравнений 1901, 1902, «Вариационное исчисление по Веерштрассу» 1903, «Calcul des variations d'après Weierstrass» 1903; *Воронець*, *Пфейффер*). Але з'явилося чимало нових ділянок досліду: алгебричне розв'язання рівнянь (*Єрмаков*, *Пфейффер*, *Бєлянкін*); диференціальна геометрія, особливо теорія поверхонь та просторових кривих у зв'язку з механікою (*Букрєєв*, *Суслов*, *Бєлянкін*, *Воронець*: алгебричні функції двох змінних (*Пфейффер*); теорія груп (*Пфейффер*); різні інші питання теорії функцій, алгебри, геометрії, механіки.

Для цієї доби характерним є переважний інтерес до суто математичних, абстрактних питань, у значній мірі відрив від практичних проблем, певний «академізм». Яскравий приклад цього — викладання курсів механіки в той час та досліди з відділу механіки: вся увага скупчується на математичному апараті, викладаються та досліджуються власне задачі з відділу геометрії, теорії диференціальних рівнянь — питання математичні в термінах механіки.

Попередня доба, 70-ті та 80-ті роки, мають ще такого видатного представника прикладної математики, як *І. Рахманінов*, що підтримує переважні «прикладні» традиції всього попереднього часу існування університету. Та й основні постаті цієї доби — *Єрмаков* і *Букрєєв*, на початку своєї діяльності, в той час віддають теж певну данину традиції — обидва починають з механіки та фізики, щоб тільки згодом перейти на чисту математику. Але вже їх учні своєю діяльністю дають рішучу перевагу цим новим уподобанням. Правда, переважають ще інтереси до класичних відділів алгебри, аналізу, теорії функцій та геометрії. Майже не репрезентовані в цьому поколінні молодші розділи чистої математики: теорія множин та функцій дійсного змінного; новіші розділи теорії чисел (та й взагалі теорія чисел), аналітична теорія диференціальних рівнянь тощо. Мало почувається зв’язок з такими значними центрами математичної думки, як Москва, Харків і особливо Петербург: київські математики в той час підлягають найбільше впливові німецької науки.

Найвидатнішими постатями цієї доби залишаються головні діячі доби попередньої. Молоде численне покоління Фізико-математичного товариства через найвизначніших своїх представників виявить себе повною мірою в наступному періоді (1905–1917).

Подаємо витяг із «Обозрения преподавания по физико-математическому факультету» за 1903 рік:

а) Отделение математических наук.

I семестр.

Курсы обязательные (16 час.)

1. Введение в высшую математику 3 часа. Орд. проф. *Букреев*.
2. Механический отдел физики 4 часа. Орд. проф. *Де-Метц*.
3. Химия 3 часа. Орд. проф. *Барзиловский*.
4. Аналитическая геометрия 4 часа. Орд. проф. *Граве*.
5. Практ. зан. по аналит. геом. 2 часа. Орд. проф. *Граве*.

Курс дополнительный

6. Начертательная геометрия 3 часа. Прив.-доц. *Воронец*.

Курсы необязательные.

7. Практ. зан. по аналит. геом. 2 часа. Прив.-доц. *Воронец*.
8. Общее землеведение 2 часа. Прив.-доц. *Марков*.

III семестр.

Курсы обязательные (20 час.)

1. Описательная астрономия 2 часа. Засл. проф. *Хандриков* и орд. проф. *Фогель.*
2. Сферическая астрономия 2 часа. Засл. проф. *Хандриков* и орд. проф. *Фогель.*
3. Дифференциальное исчисление 3 часа. Орд. проф. *Букреев.*
4. Интегральное исчисление 2 часа. Орд. проф. *Букреев.*
5. Введение в механику 2 часа. Орд. проф. *Суслов.*
6. Электричество 4 часа. Орд. проф. *Де-Метц.*
7. Алгебраический анализ 2 часа. Орд. проф. *Граве.*
8. Практ. зан. по алгебраическому анализу 1 час. Орд. проф. *Граве.*
9. Практ. зан. по диффер. исчислению 2 часа. Пр.-доц. *Пфейффер.*

Курс дополнительный.

10. Начертательная геометрия 3 часа. Пр.-доц. *Воронец.*

V семестр.

Курсы обязательные (13 час.)

1. Физические измерения 3 часа. Засл. проф. *Шиллер.*
2. Интегрирование диффер. уравнений 2 часа. Орд. проф. *Букреев.*
3. Кинематика неизменяемой системы 2 часа. Орд. проф. *Суслов.*
4. Гидродинамика 2 часа. Орд. проф. *Суслов.*
5. Практ. зан. по механике 2 часа. Прив.-доц. *Воронец.*
6. Разностное исчисление 2 часа. Прив.-доц. *Пфейффер.*

Курсы дополнительные.

7. Электростатика 3 часа. Засл. проф. *Шиллер.*
8. Теория астрономических инструментов 3 часа. Орд. проф. *Фогель.*
9. Учение об электрических колебаниях 3 часа. И. д. экс. проф. *Косоногов.*
10. Теория эллиптических функций 3 часа. Прив.-доц. *Пфейффер.*

а) Отделение математических наук.

II семестр.

Курсы обязательные (20 час.)

1. Дифференциальное исчисление 4 часа. Орд. проф. *Букреев.*
2. Химия 3 часа. Орд. проф. *Барзиловский.*
3. Теплота 4 часа. Орд. проф. *Де-Метц.*
4. Семинарий по механическому отделу физики 2 часа. Орд. проф. *Де-Метц.*
5. Аналитическая геометрия 3 часа. Орд. проф. *Граве.*
6. Прак. зан. по аналитической геометрии 2 часа. Орд. проф. *Граве.*
7. Алгебраический анализ 2 часа. Орд. проф. *Граве.*

Курсы необязательные.

8. Введение в проэктивную геометрию 1 час. Прив.-доц. *Воронец.*
9. Прак. зан. по аналитической геометрии 2 часа. Прив.-доц. *Воронец.*
10. Общее землеведение 2 часа. Прив.-доц. *Марков.*

IV семестр.

Курсы обязательные (19 час.)

1. Интегральное исчисление 4 часа. Орд. проф. *Букреев.*

2. Механика точки 3 часа. Орд. проф. *Суслов*.

3. Теплота 4 часа. Орд. проф. *Де-Метц*.

4. Описательная астрономия 2. часа. Засл. проф. *Хандриков* и орд. проф. *Фогель*.

5. Сферическая астрономия 2 часа. Засл. проф. *Хандриков* и орд. проф. *Фогель*.

6. Практ. зан. по приложению диффер. исчисления к геометрии 2 часа. Прив.-доц. *Пфейффер*.

7. Практ. зан. по интегральному исчислению 2 часа. Прив.-доц. *Пфейффер*.

VI семестр.

Курсы обязательные (19 час.).

1. Физические измерения 3 часа. Засл. проф. *Шиллер*.

2. Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 1 час. Орд. проф. *Букреев*.

3. Динамика системы 4 часа. Орд. проф. *Суслов*.

4. Вариационное исчисление 2 часа. Пр.-доц. *Воронец*.

5. Прак. занят, по механике 2 часа. Пр.-доц. *Воронец*.

6. Прак. зан. по интегрированию дифф. уравн. 3 часа. Пр.-доц. *Воронец*.

7. Теория вероятностей 1 час. Прив.-доц. *Пфейффер*.

8. Метеорология 3 часа. И. д. экстр, проф. *Косоногов*.

Курсы дополнительные.

9. Теория тока 3 часа. Засл. проф. *Шиллер*.

10. Теоретическая астрономия 3 часа. Орд. проф. *Фогель*.

Період 5. Поміж двома революціями

Попередній період був часом підготовки значної кількості наукових математичних кадрів, узятих з лона самого університету. Почавши з часів *Єрмакова*, в цьому напрямі велася робота: факультет раз-у-раз оголошував наукові теми для студентів, які в разі вдалої їх розробки, нагороджувалися золотими та срібними медалями. Під час урочистого університетського акту 1884 р., присвяченого 50-річчю університету, наприклад, нагороджено медалями кількох студентів за праці на теми з астрономії (рецензував професор *Хандріков*), 1894 р. після рецензії проф. *Покровського*, нагороджено золотою медалью студ. *Пшеборського* за працю на тему: «Розібрати метод Ваєрштраса в теорії еліптичних функцій та встановити зв'язок поміж зазначеннями Якобі та Ваєрштраса», а саму працю надруковано в «Университетских известиях». Професор *Єрмаков* не раз висував дослідчі теми для молодих математиків, оголошуючи їх в «Университетских известиях», чим теж виявляв талановиту студентську молодь. Почавши з 80-х років, в університетському органі не раз друкуються праці студентів-математиків, що їх потім висувають в аспірантуру.

Підвищення якості викладання та оригінальності наукової роботи з 70-х років XIX-го віку, інститут професорських стипендіатів, приплив на факультет демократичніших верств (дрібнобуржуазна інтелігенція, почасти селянство) — сприяли якісному та кількісному зростанню математичних наукових кадрів на межі XIX-го та XX-го століть у нашому університеті. Здається, в попередніх десятиліттях у цій справі математика була відстала від інших наук, і в той час, як, наприклад, медицина вже з 50-х та 60-х років XIX-го століття мали в Київському університеті дуже видатних представників і досить добру молоду наукову зміну,— математика спромоглася дійти такого стану тільки в 80-х–90-х роках. Може, аж під кінець XIX-го століття є підстава вбачати початок утворення київської дожовтневої математичної школи. Її оформлення та розквіт припадають на пізніший час — на період поміж двома революціями. За цей час, крім уже визначених наукових величин київського математичного світу, *Єрмакова* та *Букреєва*, виходять у перші ряди деякі молоді діячі. *Ю. В. Пфейффер* 1903 р. обороняє магістерську дисертацію «Группы многогранников», займаючись далі алгебричними функціями двох змінних та диференціальними рівняннями.

Акад. Ю. В. Пфейффер

Року 1911 він здобуває докторат за дисертацію «Представление областей особенных точек алгебраических поверхностей рядами, расположенными по целым положительным степеням двух параметров». Дисертантові довелося перемогти дуже значні труднощі і вивчити критично величезну літературу. В результаті здобуто для околу особливої точки алгебричної поверхні розвинення однієї координати по степенях двох інших і розвинення двох координат по степенях третьої, досліджено окіл уніпланарної точки; розвинено дві координати по степенях третьої вздовж кратної лінії, що проходить через уніпланарну точку такої самої кратності. Зроблено значний поступ у питаннях актуальних, що не піддавалися зусиллям видатних сучасних математиків.

Підхопивши традицію *Єрмакова*, С. Лі, Якобі, Пуассона, Лягранжа, *Ю. В. Пфейффер* звернувся далі до широкої проблематики диференціальних рівнянь з частинними похідними, де здобув високоавторитетне ім'я, як один із небагатьох високих фахівців цього відділу математики в Радянському Союзі. Глибоко вивчивши теорію інтеграла одного рівняння і системи рівнянь, він поєднав та узагальнив теорії Лягранжа та С. Лі. В дальшому ході своїх дослідів з цього обсягу *Ю. В. Пфейффер* здобув так званий «особливий спосіб» інтегрування лінійних рівнянь з частинними похідними. Ці результати йому вдалося використати для впорядкування теорії *Імшенецького* розділу змінних, узагальнення на нелінійні рівняння та на системи рівнянь.

Із багатьох результатів *Ю. В. Пфейффера* в цій широкій ділянці слід відзначити ще його високоцінні результати у так званій задачі Бюля, узагальнення методів Якобі та Якобі — Майера в теорії інтегрування систем рівнянь з частинними похідними, нові результати в теорії інтегральних інваріантів. І у викладанні і в науковій роботі *Ю. В.* визначався, як видатний знавець математичної літератури з багатьох відділів математики, як учений з глибоким критичним чуттям та високими вимогами до себе й до інших, щодо строгості обґрунтування, повноти досліду й викладу, істотності результатів.

П. В. Воронець (1871–1922) ще на студентській лаві визначається працею «Геометрическое исследование Ейлерова случая вращения твердого тела около неподвижной точки», пізніше працює над диференціальними рівняннями, векторним аналізом, різними проблемами динаміки; видатний знавець різних інших ділянок математики, зокрема диференціальної геометрії та варіаційного числення з його новішими досягненнями (Ваєрштрас, Гільберт), він спеціально займався тими задачами динаміки систем, де трапляються так звані неголономні зв'язки, що творять особливі труднощі порівняно з класичним випадком зв'язків голономних (інтегрувальних). Ряд його праць із цього відділу («Об уравнениях движения для неголономных систем» 1901, «Об одном преобразовании уравнений динамики», 1902, «Вывод уравнения движения тела, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости», 1902) завершується дисертацією «Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости», («Университетские известия» 1903, № 1 та 4). Особливі труднощі цієї задачі навіть у її частинних випадках призводили до помилок у виводі її диференціальних рівнянь у таких видатних учених, як К. Нойман, Е. Лінделеф та інші. Автор дає певні і порівнюючи прості власні засоби для виводу згаданих рівнянь, застосовує їх до деяких інтересних частинних випадків, почасти вже розібраних у літературі іншими засобами, а почасти нових.

Пізніше *П. В. Воронець* узагальнює цю задачу в працях: «К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил» (Киев, 1907), «Über die rollende Bewegung eines Körpers auf einer beliebigen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften» (1909), «Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt» (1911) та ін., займається задачею про рух матеріальної точки по шершавій поверхні під впливом даної сили, питанням про рух систем матеріальних точок під впливом сил типу загальнішого від ньютонових та ін.; скрізь здобуває нові результати та публікує їх у кращих математичних журналах («Mathematische Anallen» «Математический сборник», «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées» тощо).

Рання смерть перервала його плідну наукову діяльність.

Одне з найчільніших місць серед київських математиків періоду між двома революціями зайняв професор, нині академік, *Д. О. Граве*, вихованець славетної петербурзької школи математиків, учень *Коркіна*, *Чебишева* та *А. Маркова*. Довга та плідна його діяльність у Києві (З 1902 р.) спричинилася немало до того поєднання в Києві виливів німецької науки з характерними рисами петербурзької школи, про які вказано раніше.

Акад. Д. О. Граве

Із робіт *Д. О. Граве* 90-х років XIX ст. особливо слід відзначити ті, що стосуються задачі Діріхле, конформних перетворень та плоского зображення кривих поверхонь. Основна велика праця *Д. О. Граве* з цього відділу є його докторська дисертація — «Об основных задачах математической теории построения географических карт» (1896). Нею він робить істотний, великий крок уперед у цьому важкому й практично важливому питанні, додаючи новий розділ до теорії, утвореної працями Ейлера, Лагранжа, Гаусса, Чебишева, Шварца, *Коркіна*. Ця праця дала авторові славу першорядного вченого. Важливу для практики тему *Д. О. Граве* обрав для своєї докторської дисертації не випадково: ухил у бік конкретних задач він здобув у Петербурзі ще як Ейлерову традицію, та й його власні наукові симпатії завжди теж нахиляли його до органічного поєднання теорії з практикою: в молодих роках він грунтовно вивчав геодезію й астрономію, а за часів революції з запалом займався механікою, теоретичною фізикою, авіацією, різними питаннями енергетики та інженерних конструкцій.

По небагатьох роках перебування професором у Харківському університеті в оточенні теж першорядних математиків, пізніше академіків *Ляпунова* та *Стеклова*, *Д. О. Граве* був закликаний до Київського університету 1902 р. Тут він розвинув велику науково-педагогічну діяльність — спочатку переважно в відділу алгебри та теорії чисел. Його учні поширили та рознесли по всьому Радянському Союзу ці ділянки науки, сполучивши традиції петербурзької школи її здобутками в цих відділах класиків західноєвропейської математичної науки XIX та XX століть (Гаусса, Абеля, Галюа, Діріхле, Куммера, Кронекера, Ерміта, Жордана, Дедекінда, Вебера, Гільберта, Міньковського, Фробеніуса, Адамара, Ландау). З його ініціативи у Києві почато з таким успіхом вивчення і дальшу розробку геніальних праць Вороного, піднесено зацікавлення до питань аналітичної теорії чисел, зокрема до проблематики розподілу простих чисел, до нерозроблених глибоких питань алгебричного розв'язання рівнянь. Не мало є поставлених проблем розв'язано силами *Д. О.Граве* та його учнів.

Значну участь у роботі київських математиків при кінці цього періоду взяв також один із найвидатніших союзних механіків та геометрів, професор *О. П. Котельніков* (Казань), що нині працює в Москві.

Ця доба визначається великим творчим розмахом та різноманітністю наукових інтересів у наших математиків. Ось перелік (далеко не повний) відділів самої чистої математики, в яких велася тоді робота в Києві: основи аналізу (*Букреєв*), варіаційне числення (*Букреєв*, *Воронець*), алгебричні функції двох змінних (*Пфейффер*), різні розділи теорії диференціальних рівнянь, особливо рівнянь з частинними похідними (*Пфейффер*), теорія груп (*Граве*, *Пфейффер*), теорія Галюа та алгебричне розв'язання рівнянь (*Граве*, *Єрмаков*), матриці та квадратичні форми, лінійна алгебра (*Граве*), арифметична теорія квадратичних форм (*Граве*) теорія алгебричних чисел, ідеали (*Граве*), еліптичні та інші спеціальні функції в зв'язку з проблемами теорії чисел (*Граве*), теорія елімінації (*Граве*).

На теми з цих відділів велися семінари як в університеті, так і privatissima, вдома у професорів, провадився жвавий обмін думками з позакиївським та зокрема закордонними вченими, багато друкувалося. Все це утворювало науково насичену атмосферу, сприяючи втяганню молоді до наукової роботи, породжувало дух наукового завзяття та творчого змагання. У багатьох ще на студентській лаві стали з'являтися значні дослідні роботи, цілком самостійного характеру на відміну від компілятивних (у більшості) медальних студентських робіт на задану тему, що були характерні для двох попередніх періодів. Сміливіше і ширше йшло висування в аспірантуру, практикувалися (до 1914 р. — початку Імперіалістичної війни) відрядження аспірантів-початківців до закордонних математичних центрів.

За цей час (особливо за останні роки перед Жовтневою революцією) київська школа виховала десятки молодих математиків, що вже після 1917 р. створили собі дуже поважну наукову репутацію. Вони працюють не тільки в Києві, але й у різних математичних центрах Союзу і за кордоном. Подаємо тут далеко не повний перелік цього київського покоління: член УАН та ВАН *О. Шмідт* (Москва), професор *Вельмін* (Ростов), *Шадурський* (загинув під час імперіалістичної війни), проф. *О. Островський* (Базель), проф. *І. Штаєрман* (Київ), чл.-кор. ВАН *М. Чеботарьов* (Казань), чл.-кор. ВАН *Б. Делоне* (Ленінград), проф. *Белоновський* (Вятка), член УАН *М. Кравчук* (Київ). Представники цієї школи творять середню генерацію сучасної київської математичної школи.

Особливо передреволюційна київська математична школа та її молодь визначалися своїми успіхами в ділянці алгебри та теорії чисел. У Києві в той час було утворено найкращий курс алгебри (*Д. О. Граве*), було здобуто значні результати в теорії груп (*О. Шмідт*), в загальній теорії алгебричних чисел (*Жилінський*), у теорії кубічного поля (*Б. Делоне*), у питаннях розподілу простих чисел (*Чеботарьов*), у загальній теорії полів (*Островський*), у лінійній алгебрі (*Кравчук*).

Нарешті, в цей же час київська школа математиків щільно підійшла до питань новітнього аналізу: до трансцендентних узагальнень алгебричних проблем, до систем рівнянь з безліччю змінних, рівнянь інтегральних, теорії точкових множин та функцій дійсного змінного.

Подаємо витяг із «Обозрения преподавания в университете св. Владимира на 1913–1914 год по физико-математическому факультету»:

а) Отделение математических наук.

I семестр.

Курсы обязательные.

1. Введение в высшую математику со сферическою тригонометриею 5 часов. Засл. проф. *Букреев*.

2. Аналитическая геометрия 2-х измерений 4 часа. Орд. проф. *Граве*.

3. Введение в теорию чисел 1 час. Орд. проф. *Граве*.

4. Физика (механич. отдел) 3 часа. Орд. проф. *Де-Метц*.

5. Описательная астрономия 1 час. Орд. проф. *Фогель*.

6. Химия 5 часов. Засл. проф. *Барзиловский*.

7. Практические занятия по аналитической геометрии 2 часа. Орд. проф. *Граве*.

III семестр.

Курсы обязательные.

1. Дифференциальное исчисление (теория и аналитические приложения) 4 часа. Засл. проф. *Букреев*.

2. Алгебраический анализ 3 часа. Орд. проф. *Граве*.

3. Интегральное исчисление (интегрир. функций) 2 часа. Орд. проф. *Пфейффер*.

4. Кинематика точки 2 часа. Орд. проф. *Воронец*.

5. Сферическая астрономия 2 часа. Орд. проф. *Фогель*.

6. Физика (теплота) 3 часа. Орд. проф. *Де-Метц*.

Курсы необязательные.

7. Начертательная геометрия 3 часа. Прив.-доц. *Рекашев*.

V семестр.

Курсы обязательные.

1. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений 3 часа. Орд. проф. *Пфейффер*.

2. Кинематика твердого тела (неизменяемой системы) 2 часа. Орд. проф. *Суслов*.

3. Статика и учение о притяжении 2 часа. Орд. проф. *Суслов*.

4. Теоретическая физика (теория тепла) 3 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

5. Основы теоретической астрономии 2 часа. Орд. проф. *Фогель*.

6. Практ. зан. по интегрированию обыкн. дифференциальных уравнений 1час. Орд. проф. *Пфейффер*.

7. Практич. зан. по механике точки 2 часа. Орд. проф. *Воронец*.

8. Практ. зан. по физике 4 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

Курсы необязательные.

9. Семинарий по алгебре 2 часа. Орд. проф. *Граве*.

10. Практ. зан. но сферич. и теорет. астрономии 2 часа. Орд. проф. *Фогель*.

VII семестр.

Курсы обязательные.

1. Интегрирование нелинейных ур. с частн. производи. 3 часа. Орд. проф. *Пфейффер*.

2. Вариационное исчисление 3 часа. Орд. проф. *Воронец*.

3. Динамика твердого тела 2 часа. Орд. проф. *Суслов*.

4. Теоретическая физика (теория тепла) 3 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

5. Практ. зан. по физике 4 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

Курсы необязательные.

6. Физическая география 3 часа. Прив.-доц. *Бялобржеский*.

7. Электромагнитная теория света 3 часа. Прив.-доц. *Кордыш*.

8. Основы теории электронов 3 часа. Прив.-доц. *Бялобржеский*.

9. Спец. работы по физике 3 часа. Орд. проф. *Косоногов* (обязательн. для специалист, по физике).

а) Отделение математических наук.

II семестр.

Курсы обязательные

1. Дифференциальное исчисление (теория и аналитические приложения) 4 часа. Заслуж. проф. *Букреев*.

2. Аналитическая геометрия 3-х измерений 3 часа. Орд. проф. *Граве*.

3. Алгебраический анализ 3 часа. Орд. проф. *Граве*.

4. Введение в теорию чисел 1 час. Орд. проф. *Граве*.

5. Физика (электричество) 4 часа. Орд. проф. *Де-Метц*.

6. Описательная астрономия 3 часа. Орд. проф. *Фогель*.

7. Практ. зан. по дифференциальному исчислению 1 час. Засл. проф. *Букреев*.

8. Практ. зан. по аналитической геометрии 2 часа. Орд. проф. *Граве*.

IV семестр.

Курсы обязательные.

1. Интегральное исчисление (определенные и кратные интегралы) 4 часа. Засл. проф. *Букреев*.

2. Динамика точки 3 часа. Орд. проф. *Воронец*.

3. Сферическая астрономия 2 часа. Орд. проф. *Фогель*.

4. Практ. зан. по дифференциальному исчислению 1 час. Засл. проф. *Букреев*.

5. Практ. зан. по интегральному исчислению и его приложениям 2 часа. Орд. проф. *Пфейффер*.

6. Практ. занятия по физике 4 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

7. Физика (электричество) 4 часа. Орд. проф. *Де-Метц*.

Курсы необязательные.

8. Графическая статика 3 часа. Прив.-доц. *Рекашев* (для студ. прослушавших половину курса механики).

VI семестр.

Курсы обязательные.

1. Интегрирование линейных уравн. с част, производи. 1-го пор. 2 часа. Орд. проф. *Пфейффер*.

2. Динамика системы 4 часа. Орд. проф. *Суслов*.

3. Гидродинамика 2 часа. Орд. проф. *Суслов* (также для студ. VIII сем.).

4. Теоретическая физика (теория электричества) 3 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

5. Метеорология 2 часа. Прив.-доц. *Бялобржеский*.

6. Практ. зан. по интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений 1 час. Орд. проф. *Пфейффер*.

7. Практ. зан. по механике системы 2 часа. Орд. проф. *Воронец*.

8. Практ. зан. по физике 4 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

Курсы необязательные.

9. Некоторые приложения гауссовых криволинейных координат к механике. 2часа. Орд. проф. *Воронец*.

10. Термодинамические теории и их приложения 3 часа. Прив.-доц. *Кордыш*.

11. Электрооптика и магнитооптика 3 часа. Прив.-доц. *Бялобржеский*.

12. Практ. занят, по сферической и теоретической астрономии 2 часа. Орд. проф. *Фогель*.

13. Химия коллоидов 1 часа. Прив.-доц. *Думанский*.

14. Учение о валентности 1 час. Прив.-доц. *Казанецкий*.

VIII семестр.

Курсы обязательные.

1. Теория чисел 2 часа. Орд. проф. *Граве*.

2. Теория вероятностей 1 час. Орд. проф. *Пфейффер*.

3. Гидродинамика 2 часа. Орд. проф. *Суслов* (также для студ. VI сем.).

4. Теоретическая физика (теория электричества) 3 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

5. Практ. зан. по физике 4 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

Курсы необязательные.

6. Специальные работы по физике 3 часа. Орд. проф. *Косоногов*.

А также необязат. курсы VI сем.

Період 6. Пореволюційна київська математична школа (1917–1934)

Вже напередодні Жовтневої революції Київський університет дійшов «перепродукції» математичних наукових сил, і почав їх постачати іншим київським та поза київським вищим школам; київська математична школа переросла стіни університету.

Тепер у Києві всі значніші математичні сили купчаться коло двох центрів: Державного університету та Української Академії Наук. Що ж до виховання математичної молоді, то з 1920 р. й досі ці функції виконує власне тільки університет.

Відзначимо, що на протязі кількох років, до організації державних університетів в УССР, фізико-математичний факультет існував у складі ІНО (інституту народної освіти) та ФХМІ (фізико-хіміко-математичного інституту).

Ми не можемо спинятися тут на історії цих навчальних закладів. Відзначимо лише, що в цих інститутах, особливо в ІНО, математичні дисципліни, ані за об’ємом, ані за змістом не посідали належного їм місця. Так, наприклад, 1927 р. на першому курсі математичного відділу читався один тільки математичний курс — вступ до вищої математики (2 год. на тиждень). У фіз.-хім.-математичному інституті і справа пішла значно на краще, але й тут чотирирічний курс навчання при надто великому часі, відведеному на виробниче навчання, недостатні вимоги до студентства, низька підготовка вступників — не давали можливості достатньо озброїти слухачів математичними знаннями. Почасти це відбилося і на підготовці наукових кадрів.

Уперта праця колективу математиків, що з великою радістю зустрів ухвалу уряду від 19/IX-32 р. про заснування університетів дозволила вже 1933 р. (час відкриття університету) зразу ж почати працю за новими планами і програмами і протягом одного-двох років довести ці плани і програми до рівня кращих університетів Союзу (Москва, Ленінград).

Утворення університету стимулювало також і розгортання на математичному відділі наукової роботи, що один час велася лише в стінах УАН. Перші реальні наслідки цієї роботи відбито в першому математичному збірникові наукових записок КДУ.

Постанову уряду про наукові степені математичний відділ відзначив обороною перших кандидатських дисертацій (*Дрінфельд*, *Рибаков*). Сподіваємося, що ближчим часом оборонять дисертації ще ряд наших молодих математиків.

Революція, зломивши національні та соціальні бар'єри, якими був обгороджений царський університет, справила в його стіни численні пролетарські та. трудові селянські кадри, тим колосально збільшивши можливості щодо добору цінного людського матеріалу для висування на наукову роботу. З погляду здібностей та інтересу до науки дореволюційний студент-математик (мої спостереження стосуються років 1910–1917) стояв ледве на середньому (а може й на нижчому) рівні проти студентів інших фахів, не зважаючи на те, що математичний відділ мав славу найважчого з усіх відділів та факультетів, і що на першому курсі відбувався дуже великий відсів. Добір людей на наукову роботу фактично відбувався з дуже нечисленної верхівки; решта, велика більшість студентів, становила елемент малоцінний. Після Жовтневої Революції стан на математичному відділі рішуче змінився на краще, кількість здібної й талановитої молоді колосально зросла, відповідно зросли й аспірантські кадри.

З другого боку, революція примусила переглянути загальну настанову київської математики за попереднє 30-річчя, що характеризувалося майже виключним сприянням чистій математиці, неохотою до проблем прикладного характеру. Приділено належну увагу проблематиці прикладній — математичним задачам, актуальним для соціалістичної промисловості, сільського господарства, оборони країни, для розвитку конкретних природничих наук (фізики, хімії, біології). Механіка знову стає ближче до техніки; знов з'являються праці з важливих прикладних питань (аеродинаміка, теорія машин, балістика, будівельна справа тощо).

У 1920–1930 роках функції наукової підготовки математичної аспірантури виконувала спеціальна науково-дослідна кафедра математики під керівництвом спочатку професора *Котельнікова*, а пізніше академіка *Д. О. Граве*.

Якраз вихованці цієї кафедри є тепер головними постатями молодого покоління сучасних київських математиків. З них особливо відзначимо тих, що визначилися як культиватори нових ділянок математики в Києві і здобули значний авторитет.

Н. І. Ахієзер — член кореспондент УАН, дав ряд цінних робіт у аеродинаміці, у питаннях апроксимації функцій, в теорії функції комплексного змінного. Його досліди визначаються майстерним використанням великого математичного апарату та поєднанням інтересів теоретичних з прикладними.

В. Є. Дяченко — член-кореспондент УАН, видатний фахівець в галузі механіки, теоретичної та математичної фізики, глибокий дослідник питань теорії релятивності та інших сучасних фізичних теорій.

М. Х. Орлов — член кореспондент УАН, перший і єдиний у Києві дослідник питань рівноваги, що лишилися нам у спадщину від академіка Ляпунова, автор робіт про наближене числове розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, про механічні квадратури і кубатури, один із головних представників прикладної математики в Києві.

Є. Я. Ремез — доктор математичних наук, автор видатних робіт про наближене розв'язування диференціальних рівнянь, про апроксимаційні проблеми. Дав ряд цінних алгоритмів для реалізації Чебишовських апроксимацій.

Судилося так, що майже всі високоавторитетні представники старшого покоління дореволюційної школи київських математиків збереглися на користь і славу пореволюційній науці. Крім того, її перші роки революції університет придбав для київської математики ще академіка *М. М. Крилова* (народ. 1879 р.), обраного до Української Академії Наук на кафедру математичної фізики 1920р.

І тоді ж закликаного на роботу до університету. *М. М. Крилов* зв'язаний був з київською математичною громадськістю ще з початку XX-го століття і брав діяльну участь у роботі Фізично-математичного товариства. У виданнях Товариства вміщена низка його праць з теорії цілих трансцендентних функцій, математичної фізики та інших обсягів.

Один із найбільших авторитетів у Союзі з питань математичної фізики, варіаційного числення, теорії апроксимації, її застосувань до розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь та ін., академік *М. Крилов* на протязі цього останнього 15-річчя розвинув величезну наукову діяльність. Він утворив низку методів наближеного розв'язання задач математичної фізики, що включають відомий метод Рітца, як окремий випадок; розробив нову загальну теорію символічного інтегрування диференціальних рівнянь, утворив нові методи розв'язання нелінійних задач математичної фізики, відомі тепер під назвою нелінійної механіки. *М. М. Крилов* застосував свої-результати до багатьох важливих конкретних проблем електротехніки, зокрема радіотехніки, до теорії стійкості аероплана, до різних інших питань фізики та техніки. Праці *М. М. Крилова* у численних мемуарах, писаних або ним, або ним спільно з його учнем *М. Боголюбовим*, фігурують на сторінках математичних журналів усіх країн та зібрані у великій низці монографій, виданих у СРСР, та за кордоном. Дехто з його співробітників та учнів — пореволюційної молоді — (*М. Боголюбов*) здобули вже собі значне ім'я в науці, високі наукові ступені, премії за наукові роботи в СРСР та по за його межами. *М. М. Крилов* та за його ідеями ряд представників останнього покоління математиків київської школи далеко посунули вперед числові методи наближеного розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь (*М. Боголюбов*, *М. Орлов*, *Є. Ремез*, *О. Погребіський*). Ведеться успішна робота щодо розв'язання узагальнених задач математичної фізики (*Смогоржевський*).

Роботи *М. М. Крилова* мають широкий відгомін у науковому світі, розбираються в десятках рецензій найвидатніших представників світової математичної науки (Буліган, Блюменталь, Леві-Чівіта, Данжуа та ін.). *М. М. Крилов* утворив велику нову течію в київській математиці; вона завоювала значну частину нашого пореволюційного покоління математиків і внесла свій характерний елемент у комплекс наших математичних інтересів та змагань.

Велика група питань, яку поставив академік *Ю. В. Пфейффер* у теорії диференціальних рівнянь у новій київській школі силами його та його учнів (*Г. Дрінфельд*), успішно розв'язується та вкладається в закінчені теорії, які вже знаходять собі місце в підручній літературі.

Ряд молодих дослідників, за проводом *Д. О. Граве*, з запалом вів роботу над питанням гідро-та аеромеханіки із .застосуванням до авіації (*Н. Ахієзер*), теоретичної електротехніки (*А. Наумов*), теорії релятивності (*Л. Штрум*, *В. Дяченко*). Ці всі ділянки в київській школі освоєно вперше теж тільки в пореволюційному періоді, виховано на них ряд молодих учених та здобуто істотні результати.

Під впливом потреб практики та ідей петербурзької школи молода київська школа працює над питаннями найкращої апроксимації в розумінні Чебишева, здобувши вже ряд цінних результатів (*Ахієзер*, *Є. Ремез*, *Гросберг*, *Зуховицький*).

Не уривається в новій київській школі одержана в спадок від дореволюційної школи традиція теорії чисел (*Д. Граве*), лінійної алгебри (*М. Кравчук*, *Гросберг*), теорії функцій комплексного змінного та конформних перетворень (*Ахієзер*, *Зморович*). Народжується робота над питаннями топології (*Рибаков*). Розвиваються досліди в ділянці аналітичної теорії диференціальних рівнянь (*Соколов*). Іде широка робота над проблемами теорії пружності (*І. Штаерман*, *Тополянський*, *Кільчевський*).

Різні розгалуження проблеми моментів притягають численних дослідників (*Ахієзер*, *Кравчук*, *Можар*, *Тополянський*, *Латишева*, *Мовшиць*). Росте робота над проблемами теорії ймовірностей та математичної статистики (*Кравчук*, *Смогорожевський*, *Кулик*).

Десятки пореволюційної математичної молоді київського виховання займають кафедри по вищих школах Києва та по Союзу, немало з них мають докторські ступені. Деякі з представників цього покоління вже є членами-кореспондентами Української Академії Наук (*Ахієзер*, *Дяченко*, *Орлов*), докторами математики (*Ремез*).

Численна математична аспірантура університету щороку підсилює ці кадри, 1 щороку «лишки» їх ідуть до інших вишів та науково-дослідних установ, не відриваючись тим часом від того наукового ідейного середовища, що ми звемо «київською математичною школою».

Сторічний шлях розвитку математичної думки в нашому університеті приводить до повчальних висновків.

Ми бачили повну відсутність наукової творчості і поруч з цим невисокий рівень навчання та майже повну відсутність талановитих вихованців математичного відділу на протязі перших двох періодів його життя (1834–1870 рр.). Це час, коли на факультеті рішуче переважала науково малоцінна, а політично невизначена, або часто реакційна професура, коли студентство у величезній більшості належало до привілейованого класу тодішньої царської Росії — дворянства (польської правобережної шляхти), коли метою університету було виховання царських чиновників.

Тільки соціальні та економічні зрушення, що почалися з 60-х рр. і так сильно позначилися в кінці XIX-го та на початку XX-го століття (перша революція) — спорадично повівають свіжішим духом на провінціально-реакційні закутки факультету (1870–1905 рр.). У студентському складі щораз більшої ваги, замість дворянства, набирає дрібнобуржуазний прошарок. Факультет починає потроху висувати свої талановиті наукові кадри, народжується творча математична думка (*Єрмаков*), з'являється математична громадськість (Фізико-математичне товариство), наукова школа (акад. *Граве*), позначається політична диференціація студентства, а почасти й професури. Революційні рухи знаходять собі відгук серед студентства, ліберальна ідеологія — адептів серед професури. Наукові інтереси стають щораз глибші, математична молодь численніша, зав'язуються широкі наукові зв'язки з математичними центрами в Росії та за кордоном. Київський університет стає математичним осередком з міжнародним обміном думок, створює вперше численні власні наукові математичні кадри, що цілком забезпечують не тільки його фізико-математичний факультет, але й обслуговують інші вищі школи Києва та колишньої Росії.

Нарешті, Жовтнева революція на протязі кількох років змінює рішуче студентський склад факультету, наповняючи його робітничою та бідняцькою селянською молоддю; зберігши наукові сили старшого та середнього віку, математичний відділ досить швидко і з великими наслідками організовує підготовку наукової зміни в цей період, поширює наукові інтереси на численні нові ділянки чистої, а особливо прикладної математики, поглиблює і поширює за останні 5 років зміст навчання, успішно розвиває зв'язки з іншими науковими центрами.

У науковій роботі математичних кафедр факультету беруть помітну участь не тільки аспіранти, але й студентство, активно працюючи в математичній секції Єдиного студентського наукового товариства. Роботою секції та окремих гуртків її керують професори та доценти. Утворюється численний і міцний науковий колективів цьому колективі роль і значення пореволюційного покоління математиків щораз зростає. Відновлене Математичне товариство стає осередком не тільки наукової роботи, але й органом популяризації науки та авторитетним центром методичної думки.

Пролетарська держава, піднісши математичну освіту і математичну науку в університеті на височінь незрівнянну з попередніми періодами, має право і підстави сподіватися в ближчому майбутньому від нього таких наукових математичних кадрів, що зроблять нашу математичну школу осередком світового значення.

Для порівняння сучасного стану математичного відділу з його станом у попередніх періодах подаємо навчальний план на 1935/36 рік.

I-й семестр — 28 годин на тиждень.

1. Математичний аналіз з практикумом — 6 год.	проф. Орлов М. Х. асист. Щербак Д. В.
2. Аналітична геометрія — 6 год.	проф. Букрєєв Б. Я. асист. Ільїн І. Г.
3. Вища алгебра — 4 год.	акад. Кравчук М. П. доц. Мовшиць С. С.
4. Нарисна геометрія — 3 год.	доц. Фукс Б. Г.
5. Фізика — 3 год.	доц. Клігман Ф.
6. Політекономія — 2 год.	доц. Погребінська.
7. Французька мова — 4 год.	асист. Картьє.

II-й семестр — 28 годин на тиждень.

1. Математичний аналіз — 6 год.	проф. Орлов М. Х. асист. Щербак Д. В.
2.Аналітична геометрія — 4 год.	проф. Букрєєв Б. Я. асист. Ільїн І. Г.
3. Вища алгебра з елементами теорії чисел — 4 год.	акад. Кравчук М. П. доц. Мовшиць С. С.
4. Нарисна геометрія з кресленням — 2 год.	доц. Фукс Б. Г.
5. Фізика — 6 год.	доц. Клігман Ф.
6. Політекономія — 2 год.	доц. Погребінська
7. Французька мова — 4 год.	асист. Картьє

III-й семестр — 28 годин на тиждень.

1. Математичний аналіз — 4 год.	проф. Орлов М. Х.
2. Проективна геометрія — 3 год.	доц. Рибаков Б. М.
3. Астрономія — 6 год.	доц. Путілін І. І.
4. Фізика — 8 год.	проф. Маргуліс Н. Д.
	асист. Сахаров І. І.
5. Діалектичний матеріалізм — 4 год.	проф. Чернін Л. Б.
6. Французька мова — 3 год.	асист. Картьє

IV-й семестр — 28 годин на тиждень.

1. Математичний аналіз — 6 год.	проф. Орлов М. Х.
2. Диференціальна геометрія — 4 год.	проф. Букрєєв Б. Я.
	асист. Ільїн І. Г.
3. Теоретична механіка — 5 год.	доц. Погребіський Й. Б.
4. Фізика — 4 год.	проф. Маргуліс Н. Д
5. Інтегрування диф. рівнянь — 4 год.	акад. Пфейффер Ю. В.
6. Діалектичний матеріалізм — 2 год.	проф. Чернін Л. Б.
7. Французька мова — 3 год.	асист. Картьє.

V-й семестр — 26 годин на тиждень.

1. Диференціальна геометрія — 3 год.	проф. Букрєєв Б. Я.
	асист. Ільїн І. Г.
2. Теоретична механікам — 5 год.	проф. Штаерман І. Я.
	асист. Седляр М. М.
3. Інтегрування диф. рівнянь — 4 год.	акад. Пфейффер Ю.
4. Теорія функцій дійсного змінного — 4 год.	проф. Ремез Е. Я.
5. Теорія функцій комплексного змінного —	проф. Дяченко В. Є.
4 год.	асист. Гудименко Ф.
6. Економполітика — 4 год.	доц. Рейзер Б. Л.
7. Французька мова — 2 год.	асист. Картьє.

VI-й семестр — 26 годин на тиждень.

1. Інтегрування диф. рівнянь —5 год.	акад. Пфейффер Ю. В.
2. Теоретична механіка — 6 год.	проф. Штаерман І. Я.
	асист. Седляр М. М.
3. Теорія функцій компл. змінного — 6 год.	проф. Дяченко В. Є.
	асист. Гудименко Ф. С.
4. Теорія ймовірностей — 5 год.	акад. Кравчук М. П.
	доц. Дрінфельд Г. І.
5. Ленінізм — 4 год.	проф. Рахманінов.

VII-й семестр — 24 години на тиждень.

1. Теоретична механіка (механіка континуума) — 4 год.	проф. Штаерман І. Я. асист. Кільчевський Н. О.
2. Теоретична фізика — 3 год.	доц. Клігман Ф.
3. Апроксимація функцій з обчислювальним практикумом — 4 год.	проф. Ремез І. Я.
4. Варіаційне числення — 3 год.	проф. Букрєєв Б. Я.
5. Теорія груп, теорія Галуа — 2 год.	акад. Кравчук М. П.
6. Педагогіка — 2 год.	проф. Рєзнік Я. С.
7. Методика математики — 2 год.	доц. Тополянський Д. Б.
8. Теорія поверхонь (факультативно) — 2 год.	проф. Букрєєв Б, Я.
9. Додаткові розділи інтегрування диференціальних рівнянь (факультативно) — 2 год.	акад. Пфейффер Ю. В.

VIII-й семестр — 24 години на тиждень.

1. Теоретична механіка (механіка континуума) — 4 год.	проф. Штаерман І. Я.
2. Теоретична фізика — 4 год.	доц. Клігман Ф.
3. Інтегральні рівняння — 3 год.	проф. Орлов М. Х.
4. Аналітична теорія диф. рівнянь — 3 год.	проф. Дяченко В. Є.
5. Тензорний аналіз — 2 год.	проф. Дяченко В. Є.
6. Історія та методологія математики — 2 год.	проф. Чернін Л. Б.
7. Рівняння математичної фізики — 2 год.	проф. Дяченко В. Є.
8. Спеціальні функції (факультативно) — 2 год.	проф. Орлов М. Х.
9. Нелінійна механіка (факультативно) — 2 год.	проф. Боголюбов М. М.

IX-й семестр — 20 годин на тиждень.

1. Рівняння математичної фізики — 4 год.	проф. Дяченко В. Є.
2. Різницеве числення — 3 год.	доц. Погребіський Й. Р
3. Теорія чисел — 3 год.	акад. Кравчук М. П.
4. Вища геометрія — 4 год.	доц. Рибаков Б. М.
5. Апроксимація функцій — 2 год.	акад. Кравчук М. П.
6. Семінар фахової літератури — 2 год.	акад. Кравчук М. П.
7. Теорія стійкості (факультативно) — 2 год.	проф. Штаерман І. Я.
8. Функціональний аналіз (факультативно) — 2 год.	доц. Дрінфельд Г. І.
9. Аналітична теорія деяких рівнянь динаміки (факультативно) — 2 год.	проф. Соколов Ю. Д.

X-й семестр

Виконання дипломної роботи.

ДРУГИЙ ВСЕСОЮЗНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ З'ЇЗД *

Від якогось часу, і в нас і за-кордоном, чути голоси проти таких великих з'їздів, як з'їзди, присвячені комплексові всіх математичних наук. В наші часи майже немає математиків-універсалістів: кожен працює у вузькій галузі і слабко розумій свого товариша — фахівця з іншої математичної галузі. Тому висуваються пропозиції замінити систему з'їздів системою вузьких конференцій з окремих ділянок математики — на зразок інтернаціональної конференції з диференціальної геометрії, що весною цього року відбулася в Москві. Зокрема й у нас у Києві, коли добиралася делегація на II Всесоюзний з'їзд математиків (що був у Ленінграді 24–30 червня 1934 р.) з робітників Академії та Університету, чути було голоси про недоцільність витрачати кошти на те, щоб дати змогу людям проїхатися й змарнувати кілька днів на розваги й кулуарні розмови. Безперечно, ні один член з'їзду не був у силі охопити навіть усі оглядові доповіді з'їзду, не говорячи вже про спеціальні, секційні, що їх число доходило 200. Доповіді дуже широкого значення йшли не раз паралельно з іншими, не менше важливими; при чім вони подавалися в такій стислій і далеко не популярній формі, що годі було зрозуміти їх цілком не фахівцям з даної галузі. Секційні доповіді, як правило, мали характер 15-хвилинних резюме, часом навіть без написання всіх основних формул.

Дискусії з приводу доповідей не раз розвивалися слабко через неможливість попереднього ознайомлення з змістом доповіді.

Проте ніяк не можна погодитися, що такі з'їзди вже віджили, втратили своє значення. Такі загальні критичні самоогляди для кожного з нас мають значення, як основні регулятори особистої роботи, вони намічають нам спільників у роботі та ближчі перспективи, виявляють не раз несподівані зв'язки поміж, здавалося б, зовсім далекими ділянками науки; намічають загальні тенденції розвитку математич-

---

* 1. Вісті УАН. — 1935. — № 1. — С. 59–74.

2. Михайло Кравчук. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — НТУУ «КПІ», 2000. — 232 с.

ної думки й дають провідні думки для планування її роботи. Нарешті, живий контакт з цілою інтелектуальною армією відограє роль могутнього стимулятора наукової творчості.

Особливе значення ці з'їзди мають для виховання нашої наукової молоді. Молодий науковий робітник примушений звичайно вузько замикатися в полі своїх спеціальних інтересів, втрачаючи не раз загальну орієнтацію в інших ділянках своєї науки, почуття відносної важливості тих чи тих проблем, нехтуючи глибокі зв'язки й переплетення методів різних галузів математики. З'їзди, де зусиллями сотень людей, десятків наукових організацій дається в стислій формі показ найновіших досягнень, найяскравіших зразків методики наукової творчості, взаємовпливів ідей, напрямів, шкіл, є неоціненна школа для молодого науковця: тут він черпає собі теми, методи, виробляє свої методологічні та філософські настанови, тут він критично зважує свої сили та наслідки, своєї роботи, здобуває наснагу для дальшої праці. Особливо цей Другий всесоюзний з'їзд мусів мати на нашу молодь такий стимуляційний вплив: на ньому бо якраз молоде, радянське покоління математиків відігравало поважну, коли, не головну, роль, даючи живий приклад до наслідування та виклик на змагання своїм ще молодшим товаришам.

Як одну з великих хиб у роботі Оргкомітету з'їзду, треба вказати ізольованість його підготовчої робити. Ленінградська верхівка Оргкомітету мала справді живий зв'язок тільки з Москвою. Решта математичних центрів, зокрема Київ, хоч номінально (правда, з великим запізненням) і дістали представництво в Оргкомітеті, але фактично не змогли його використати, ні разу не бувши на засіданнях комітету*).

Від УАН у з'їзді брали участь академіки *А. Динник*, *Ю. Пфейфер* та *М. Кравчук*, члени-кореспонденти УАН *В. Дяченко* та *Н. Ахієзер*, наукові співробітники *В. Можар*, *Б. Рибаков*, *Д. Тополянський*, *Ю. Соколов*, *Є. Ремез*, *С. Кулик*, аспіранти *Фещенко* та *Бреус* і бібліотекар *М. Бик*.

Доповіді дали: *Ю. Пфейфер* (2), *А. Динник* (2), *М. Кравчук* (2), *Н. Ахієзер* (2), *Є. Ремез* (1), *І. Штаєрман* (1), *О. Смогоржевський* (1).

Ю. Пфейфер та *М. Кравчук* були членами президії з'їзду та головували на пленарних засіданнях і на засіданнях секцій. *В. Дяченко* та *М. Кравчук* були членами комісій для підготовки резолюцій, *М. Кравчук* коротко доповідав про роботу Інституту математики УАН.

---

* На представників до комітету з Києва було запрошено академіків *Д. О. Граве* та *М. М. Крилова*.

На з'їзді переобрано Математичну асоціацію, збільшено її склад та наказано працювати енергійніше, ніж працював попередній склад асоціації. На голову асоціації, під бурхливі оплески зборів, визначено дійсного члена УАН *О. Ю. Шмідта.* Із співробітників УАН до асоціації обрано ще: академіків *Ю. Пфейфера*, *М. Кравчука*, членів-кореспондентів УАН *М. Орлова* та *Н. Ахієзера.*

Із організаційних справ, яким на з'їзді було приділено спеціальне пленарне засідання, треба насамперед відзначити питання про роботу та перспективи розвитку н.-д. математичних інститутів, математичних товариств та інших установ, де ведеться наукова робота з математики. В СРСР є математичні науково-дослідні інститути: при Академіях— всесоюзній, Українській та Білоруській (Фізико-математичний інститут), при Ленінградському, Московському, Харківському та Томському університетах та в Тіфлісі. З'їзд ухвалив пропозицію заснувати ще інститут у Казані, де провадиться значна науково-дослідна робота. Там працює один з найвидатніших математиків школи нашого академіка *Д. Граве — М. Чеботарьов.*

Обговорення роботи н.-д. установ відкрито доповідями про роботу Московського та Ленінградських інститутів. Виявлено великі наслідки щодо готування наукових кадрів у Москві, значні наслідки в Харкові і мало задовільний стан цієї справи в інших місцях.

Було зроблено спробу дати загальну характеристику наукової роботи в основних центрах, зокрема в Москві та Ленінграді.

Найдавніша математична школа в СРСР є ленінградська. Як відомо, блискучий початок математичних дослідів у колишньому Петербурзі зв'язується з іменами таких велетнів, як Д. Бернуллі та Л. Ейлер, перших математиків — членів Російської Академії Наук. Кращі традиції цієї класичної доби через таких видатних математиків XIX та XX віку, як академіки *Буняковський*, *Остроградський*, *Чебишов*, *Ляпунов*, *Марков*, професори *Золотарьов*, *Коркін*, *Вороний* передалися до наших часів і чималою мірою характеризують напрям та тематику дослідів сучасних ленінградських математиків. Центральні ділянки їх роботи — це теорія чисел з алгеброю та класичний аналіз з застосуванням до механіки та математичної фізики.

Використання та поглиблення класичних методів, узагальнення задач, що ведуть свій початок не раз від самих основоположників школи, маючи 200-літню давність, безпосередній розвиток ідей *Чебишова*, *Маркова*, *Вороного*, конкретність задач, чіткість наслідків, істотність узагальнень,— ось цінні риси сучасної ленінградської школи. Одночасно певна традиційна обмеженість засобів, неохота до новітньої загальнішої апаратури математичного аналізу, що в нових часах розрісся поза рамки класичних методів, брак загально-методологічних настанов — ось її вузькі місця.

Як представників цієї школи в Києві, назвемо академіків *Д. Граве* та *М. Крилова*. Коли взяти на увагу, що кілька поколінь київських математиків виховалося під керівництвом цих представників ленінградської школи, то можна сказати, що й у нас у Києві переважає тематика й методологія, характерна для ленінградців.

Московська математична школа, яка ідейно й методологічно оформилася остаточно аж у другому десятиріччі XX віку, і де роль центральної фігури відіграє академік *М. Лузін*, є представниця тих нових течій у математиці, що почали виявляти себе в Західній Европі в другій половині XIX віку, насамперед у роботах *Ваєрштраса* та *Кантора*. Ці вчені та їх наступники через критичний перегляд основ класичного аналізу прийшли до утворення таких характерних галузів математичної науки, як теорія множин, сучасна теорія функцій дійсного змінного та топологія. Ці математичні дисципліни, борючись за досконаліше обгрунтування основ математики, намагаються утворити нові загальні методи дослідження, зреформувати основні поняття аналізу та геометрії, до кінця позбутися геометричної інтуїції, як елементу побудови системи науки.

Вони часто стають на межі між математикою та логікою й теорією пізнання, загострюючи інтерес математиків до загально філософських проблем.

Як констатовано на з'їзді, московська школа останніми часами могутньо впливає й на класичний ленінградський напрям, запліднюючи його новою методологією дослідження, але одночасно переймає його сильні сторони: конкретність проблематики та зв'язок з практикою. З'їзд, указавши на цю тенденцію зближення двох шкіл, відзначив її як явище високо позитивне.

У Києві та на Україні взагалі зв'язок з ідейним напрямком праць московських математиків досить слабкий, зокрема щодо типологічних дослідів та питань теорії множин і функцій дійсного змінного. Завдання нашого молодого покоління математиків — заповнити цю прогалину і підсилити роботу в ділянці геометрії взагалі.

На одному з засідань президії з'їзду висунуто думку ввести в систему скликання в Союзі міжнародних конференцій з вузьких ділянок математики. Намічено ряд таких конференцій. Зокрема, на пропозицію автора цих рядків, конференцію з алгебри намічено на 1936 р. у Києві, мотивуючи тим, що в XX віці центром алгебричних досліджень у колишній Росії, а пізніше в Союзі був Київ, а саме — школа академіка *Д. Граве*, видатні представники якої піднесли інтерес до цієї ділянки і в інших центрах Союзу — в Ленінграді, Москві, Казані тощо. В Математичному інституті УАН вже розпочато підготовчу роботу до цієї конференції; вона повинна піднести серед нашої наукової молоді інтерес до цієї науки, що останніми часами чимало занепав. Як виявилося певною мірою й на з'їзді, ця наука, що її намагаються трактувати інколи дуже вузько, в дійсності є одним із тих теренів, де якнайплідніше можуть поєднуватися та взаємно стимулюватися ті дві методологічні течії, що ми їх подали, як сумарні характеристичні ознаки московської та ленінградської шкіл. Через теорію груп алгебра built вростає в топологію та теорію множин, а через теорію алгебричних функцій та аналітичну теорію чисел — в класичний аналіз та геометрію.

З'їзд настоює на рішучому піднесенні знань з історії та філософії математики та організації спеціальної аспірантури з цим ухилом, на просуванні в спеціальні журнали статтей з історії та філософії математики.

Нарешті, відзначу спеціальний пункт резолюції, що стосується наближених обчислень, як спеціального важливого засобу математичних досліджень. На з'їзді була спеціальна секція наближених обчислень, чого на подібних з'їздах (наших і міжнародних) не робили. Цим з'їзд хотів підкреслити особливу вагу, яку він надає цим методам, як шляхам ефективного розв'язання математичних проблем.

Наукова робота з'їзду відбувалася в 9 секціях: 1) алгебри та теорії чисел, 2) геометрії, 3) топології, 4) аналізу I (теорія функцій), 5) аналізу II (диференціальні та інтегральні рівняння), 6) механіки та математичної фізики, 7) наближених обчислень, 8) теорії ймовірностей, 9) історії та філософії математики.

Крім того було подано ряд загальних доповідей, що мали на увазі ознайомити з найновішими результатами науки на досить широких ділянках, а зокрема з досягненнями в цих ділянках радянських науково-дослідних установ та окремих учених. Відзначмо важливіші з цих доповідей: акад. *І. Віноградов* (Ленінград) — «Задача Уорінга», проф. *А. Гельфанд* (Москва) — «Теорія трансцендентних чисел», проф. *М. Чеботарьов* (Казань) — «Деякі проблеми сучасної теорії Галюа», проф. *Г. Александров* (Москва) — «Топологія та алгебра в їх взаємовідношеннях», проф. *Л. Понтрягін* (Москва) — «Структура суцільних груп», проф. *Л. Люстернік* і *Л. Шнірельман* (Москва) — «Топологічні методи в застосуванні до екстремальних задач», проф. *В. Смірнов* (Ленінград) — «Деякі роботи в обсягу аналізу та його застосувань у Ленінграді», проф. *І. Кібель* (Ленінград) — «Механіка стискальної рідини», проф. *М. Гюнтер* (Ленінград) — «Інтеграли Стільтьєса в математичній фізиці та в теорії інтегральних рівнянь», проф. *А. Колмогоров* (Москва) — «Про деякі нові течії в теорії ймовірностей».

Із секційних доповідей деякі теж були оглядового характеру, але не могли бути вміщені, через брак часу, в програму пленарних засідань. Із них відзначимо доповідь проф. *Б. Делоне* (Ленінград) — «Теорія чисел та кристалографія» (в І секції).

Через брак місця я спинюся коротко тільки на деяких із оглядових доповідей та на деяких доповідях співробітників УАН.

Акад. *Віноградов*, один із найвидатніших світових учених у галузі теорії чисел, у своїй доповіді спинився переважно на своїх результатах у задачі Уорінга. Задача полягає в доводі можливості представлення всякого цілого числа сумою обмеженої кількості K-их степенів цілих чисел, де K — ціле число. Задача лишалася нерозв'язаною протягом довгих десятків років, аж поки славетний німецький математик *Гільберт* на початку XX віку не дав першого доводу цієї теореми. Пізніше дослідники поглибили результат *Гільберта*; сам доповідач зробив у цю теорію власні важливі внески. Подібні задачі, не такого загального характеру, ставлено і почасти розв'язано давно. Напр. *Ферма* знав, що всяке первісне число типу $4n+1$ є сума двох квадратів. Ейлер (XVIII в.) довів, що всяке ціле число є сума чотирьох квадратів. Це все є частинні питання загальної теорії представлення чисел формами,— утвореної такими вченими, як *Лагранж*, *Гаус*, *Ерміт*, *Вороний*; над нею в Ленінграді працює гурт математиків на чолі з проф. *Б. Делоне*, вихованцем київської школи.

Доповідь *А. Гельфанда* дала історичний огляд розвитку одної з вищих і найменш розроблених, ділянок теорії чисел. Трансцендентним числом називають число, що не може бути коренем ніякого алгебричного рівняння з раціональними коефіцієнтами. Перші зразки таких чисел дав у XIX столітті французький математик *Ліувіль*; пізніше *Кантор* показав, що майже всі дійсні числа трансцендентні. Але головна трудність полягала в питаннях типу: дане конкретне число трансцендентне чи ні?

Ерміт у другій половині XIX в. в роботі епохального значення для теорії показав, що відоме число e трансцендентне; використавши його результат, *Ліндеман* довів і трансцендентність числа π. Після того знову протягом довгого часу не було істотного поступу в цій справі. Спроба *Гензеля* утворити засоби дослідження трансцендентності чисел з допомогою ознак, аналогічних тим, які характеризують трансцендентність деяких функцій (на початку XX в.), закінчилася невдало. *Гільберт* на інтернаціональному з'їзді математиків у Парижі 1900 р. сформулював кілька трудних проблем, що довгі часи не піддавалися розв'язанню. Серед них була й така: довести, що ірраціональний степінь раціонального числа є число трансцендентне (напр. $2^{\sqrt[3]{5}}$ — трансцендентне). Заслуга доповідача та, що на протязі часу, який обіймає перші два з'їзди (1930–1934), він цілком довів цю теорему, розв'язавши тим світову проблему.

Доповідь проф. *Александрова* важлива і конкретним своїм змістом, і загальною методологічною настановою, що може бути сформульована, як вимога глибокого застосування діалектичних принципів у справах класифікації науки. Топологічні дослідження, зв'язані з іменами таких першорядних радянських математиків, як *Александров*, *Понтрягін*, небіжчик *Урисон* та ін., зробили Москву світовим центром топології. Цікаво відзначити, що одна з перших важливих теорем топології зв'язана з славетним іменем основоположника петербурзької школи *Ейлера*: коли в многостіннику C є число стін, P — число рубів, B — число вершків, то

$$C - P + B = 2.$$

Цей результат *Пуанкаре* пізніше узагальнив на простір будь-якої кількості вимірів, і він став одним із основних результатів т. зв. комбінаторної топології.

Топологія тепер поширює свій вплив і свою могутню допомогу на велику кількість ділянок математики і насамперед спричинюється до розвитку різних відділів аналізу. Вона ставить по-новому питання про поєднання геометрії з аналізом через утворення одної загальнішої науки, яка поглине ці дві, як частинні випадки.

Із ленінградських робіт, яким була присвячена доповідь проф. *В. Смірнова*, особливо треба відзначити роботи небіжчика *Лаппо-Данілевського*, що сказали нове велике слово в аналітичній теорії диференціальних рівнянь — одній із найтрудніших ділянок аналізу, одному з головних джерел нових трансцендентних функцій. Важливо, що ці результати здобуто через трансцендентне узагальнення суто алгебричного апарату, т. зв. матрицевого числення. Свого часу таке саме трансцендентне поширення теорії систем лінійних рівнянь привело до теорії інтегральних рівнянь Фредгольма та до теорії форм з безліччю змінних Гільберта — двох першорядних засобів сучасної математичної фізики. Праці *Лаппо-Данилевського* не досить оброблені, багато з них лишилися неопубліковані за його життя, і ленінградці, зосібна професори *Смірнов* та *Кочін*, роблять діло великої ваги, розбираючи та видаючи ці результати, що ставлять ім'я автора поруч найславетніших наукових імен.

У доповіді проф. *Гюнтера* дано зведення його робіт, де автор узагальнює та застосовує до математичної фізики поняття інтеграла, введене в науку одним із найвидатніших математиків кінця XIX в. *Стільтьєсом*. У той час, як звичайний означений інтеграл є границя суми нескінченно малих елементів, інтеграл Стільтьєса може містити в собі скінченні елементи. Він пристосований більше до вивчення перервнозмінних величин, ніж інтеграл у звичайному розумінні; це повинно мати особливу вагу для сучасної фізики, що висуває принцип перервності в фізичних явищах, як рівноправну антитезу до принципу суцільності.

Доповідь одного з видатніших московських математиків проф. *Колмогорова* стосувалася нових здобутків (переважно московської школи) в теорії ймовірностей.

У другій половині XIX ст. та на початку XX ст. зусиллями *Чебишова*, *Маркова*, *Стільтьєса* та *Ляпунова* здобуто фундаментальний результат, що, за дуже загальних умов, розподіл частинного середнього арифметичного, при необмеженому зростанні числа його членів, іде до відомого Гаусового розподілу. Ця теорема є грандіозне узагальнення відомих теорем *Бернуллі* та *Пуасона* в тому оформленні, яке їм дав *Ляплас*. Це є один із найвищих математичних здобутків колишньої петербурзької школи. Два різні доводи цієї теореми дали *Ляпунов* та *Марков*.

Московські та деякі західноєвропейські дослідники, застосувавши до цих питань апарат рівнянь математичної фізики, досягли таким чином великих спрощень та узагальнень, а заразом — ув’язки з важливими задачами сучасної теоретичної фізики.

Треба відзначити, що в особах таких дослідників цих обсягів, як академік *С. Бернштейн*, професори *Хінчин*, *Колмогоров* та багато інших, Радянський Союз у ділянці теорії ймовірностей та математичної статистики теж має підстави претендувати на перше місце в світі.

Доповідь *Б. Делоне* дала яскравий зразок зв’язку найабстрактнішої теорії з першорядними проблемами конкретної науки (кристалографії), чудового поєднання арифметичних методів дослідження з геометричними. Автор подав наслідки своїх багаторічних дослідів з теорії представлення чисел формами, де він розвинув та з’ясував геометрично насамперед результати геніального українського математика *Г. Вороного*. Виявилося, що в своїй одній частині ця теорія являє собою справжні основи наукової кристалографії.

Акад. *Пфейфер* подав деякі з своїх численних результатів у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Вони вже частково входять у загальні курси, як матеріал класичного характеру.

Проф. *Ремез* повідомив про наслідки своїх останніх робіт з апроксимації функції у напрямі, вказаному свого часу славетним *Чебишовим*; йому вдалося дати ефективні способи здобуття цих апроксимацій.

Проф. *Н. Ахієзер* та проф. *М. Крейн* дали цікавий розвиток деяких важливих результатів *А. Маркова*, що стосуються проблеми моментів.

Акад. *Динник* (Дніпропетровськ) і його учні дали ряд застосувань аналізу до важливих питань інженерної справи.

Доповіді *І. Штаєрмана*, *В. Дяченка*, *О. Смогоржевського*, *М. Кравчука* стосувалися різних ділянок алгебри, аналізу та математичної фізики.

Всі доповіді мають бути надруковані протягом ближчого року.

Наступний Третій всесоюзний з’їзд математиків заплановано влаштувати в місяці вересні 1937 року в Тифлісі.

ПІВСТОЛІТТЯ НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ АКАДЕМІКА Д. О. ГРАВЕ*

Цього року минає 50 літ, як Дмитро Олександрович Граве† по закінченні курсу фізико-математичного факультету кол. Петербурзького університету вступив на довгий і плідний шлях наукової та професорської діяльності.

Перші роки самостійної роботи Дмитра Олександровича пройшли в Петербурзі, де він викладав вищу математику в різних вищих школах, зокрема в Інституті шляхів.

Учень славетної петербурзької школи математиків, зокрема П. Л. Чебишова, Коркіна і А. Маркова, він і надалі, після закінчення університету, не поривав контакту з цими корифеями математичної науки, спадкоємцями традицій та слави Леонарда Ейлера і Данієля Бернуллі. Саме в ті часи видатніші представники наукового математичного світу визнавали за петербурзькою школою математиків світову вагу. Товаришами Дмитрові Олександровичу на перших кроках його діяльності були представники дальших молодших поколінь петербурзької школи, з яких особливо слід відзначити А. Маркова та Г. Вороного. До цього молодшого славного покоління і належить наш ювіляр, як один із кращих його представників.

Перші кроки наукової діяльності Д. О. Граве були присвячені загальній теорії інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними. Тут, з одного боку, позначився вплив на Д. О. Граве його найближчого вчителя, проф. Коркіна, а з другого боку — той загальний велетенський поштовх, що його дав теорії диференціальних рівнянь С. Лі; відгук на цей поштовх свого часу (у 70—80-х роках) позна-

* Акад. М. Кравчук, акад. М. Крилов, акад. Ю. Пфейфер, проф. І. Штаєрман // Вісті УАН. — 1935. — № 5. — С. 59–64.

† Народився 1863 року.

чився і в Києві (роботи проф. Єрмакова). Магістерська дисертація Д. О. Граве якраз присвячена питанням з цього обсягу.

Із робіт Д. О. Граве 90-х років XIX ст. особливо слід відзначити ті, що стосуються задачі Діріхле і конформних перетворень та плоского зображення кривих поверхень. Основна систематична праця Д. О. Граве з цього обсягу є його докторська дисертація — «Об основных задачах математической теории построения географических карт» (1896); вона частково з іншими засобами розв'язання була публікована й раніше. Нею Дмитро Олександрович робив істотний, великий крок уперед у цьому тяжкому й практично важливому питанні, додаючи новий розділ до теорії, утвореної працями Ейлера, Лягранжа, Гаусса, Чебишова, Шварца, Коркіна. Ця праця дала Д. О. Граве славу першорядного вченого. Важливу для практики тему Дмитро Олександрович обрав для своєї докторської дисертації не випадково: ухил у бік конкретних задач він здобув у Петербурзі ще як Ейлерову традицію, та й його власні наукові симпатії завжди теж нахиляли його до органічного поєднання теорії з практикою — в молодих роках він грунтовно вивчав геодезію й астрономію, а за часів революції ввесь час з запалом займався механікою, теоретичною фізикою, авіацією, різними питаннями енергетики та інженерних конструкцій.

По небагатьох роках перебування на професурі в Харківському університеті, де Дмитро Олександрович працював разом з теж першорядними математиками — пізніше академіками Ляпуновим та Стекловим, Дмитро Олександрович на початку XX ст. був закликаний до Київського університету. Тут він розвинув велику науково-педагогічну діяльність — спочатку переважно в обсягу алгебри та теорії чисел. У Києві Дмитро Олександрович утворив цілу велику школу. Її вихованці поширили по всьому Союзу ці ділянки науки, сполучивши традиції петербурзької школи із здобутками в цих обсягах класиків західноєвропейської математичної науки XIX та XX століть (Гаусса, Абеля, Галуа, Діріхле, Куммера, Кронекера, Ерміта, Жордана, Дедекінда, Вебера, Гільберта, Міньковського, Фробеніуса, Адамара, Ландау). Його глибоке змістовні семінари та спеціальні курси київського періоду стосуються арифметичної теорії квадратичних форм, теорії ідеалів, еліптичних функцій та зв'язаних з ними проблем теорії чисел, теорії груп, теорії Галуа, теорії матриць та алгебричної теорії форм, загальної теорії полів, геометричної теорії чисел і багатьох інших обсягів. З його ініціативи почато з таким успіхом у Києві вивчення і дальшу розробку геніальних праць Вороного, піднесена зацікавлення до питань аналітичної теорії чисел, зокрема до проблематики розподілу простих чисел, до нерозроблених глибоких питань алгебричного розв'язання рівнянь. Не мало з порушених проблем розв'язано силами Дмитра Олександровича та його учнів. Серед учнів його є такі видатні постаті, як акад. О. Ю. Шмідт, професори Б. Делоне, М. Чеботарьов, І. Штаєрман, О. Островський. У цій школі завжди панував дух глибокого досліду, дбалося за поставлення нових і важливих проблем, провадилася боротьба проти тенденцій ізоляції окремих вузьких наукових ділянок та проблем: алгебра та теорія чисел трактувалися в ув'язці з питаннями геометрії, механіки, теорії функцій, фізики.

Понад 30 років вів і веде Дмитро Олександрович творчу і організаційну роботу в Києві. Її великі наукові наслідки, великі успіхи учнів Д. О. Граве високо піднесли його науковий авторитет і не можуть не дати ювілярові глибокого морального задоволення.

Незабаром після організації УАН Д. О. Граве обрано на першу з відкритих в Академії математичних кафедр. Далі Д. О. Граве обрано на члена-кореспондента, а пізніше (1929 р.) — на почесного члена Всесоюзної Академії Наук.

Нарешті, ми бачимо його в ролі директора Інституту математики УАН — визнаного вчителя нашої математичної молоді, пропагатора плідного принципу органічного поєднання дослідних зусиль інженерів та математиків, діяльного вихователя радянських наукових кадрів.

Дмитро Олександрович може справедливо пишатись своїми здобутками: його праці з повагою цитуються в сучасній математичній літературі та використовуються для актуальних проблем сучасної науки та техніки; кілька поколінь його учнів з честю підтримують славу його школи, досліджують його проблеми (остання київська математична дисертація — Є. Ремеза — знову порушує проблематику Д. О. Граве та здобутки його дисертації); він здобув почесне місце серед працівників на фронті соціалістичного будівництва; він є одна з головних фігур, що виводили в Києві та на Україні математичну науку з провінціальних закутків, від переспівів наукової старовини — на вільне повітря оригінальної творчості, на широкий шлях інтернаціонального співробітництва та творчого змагання.

АКАДЕМІК Ю. В. ПФЕЙФЕР (З НАГОДИ 35-ЛІТТЯ НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ)*

Вся педагогічна та наукова діяльність академіка Юрія Васильовича Пфейфера нерозривно зв'язана з Київським університетом та з Українською Академією Наук.

До Київського університету прийшов він, як студент, 1891 року, закінчивши з медалею прилуцьку гімназію. В університеті Ю. В. Пфейфер слухав лекції найвидатніших тодішніх київських математиків, В. П. Єрмакова та В. Я. Букреєва; тут він відбув аспірантуру, склав у 1900 р. магістерський іспит, з якого часу став викладачем — приват-доцентом університету, оборонив магістерську дисертацію — «Группы многогранников» (1903) та продовжував широку наукову роботу. Тут він працює й досі як керівник кафедри математичного аналізу.

Викладач Київського політехнічного інституту в роках 1899–1909, професор університету з 1909 року, професор на Вищих жіночих курсах з 1909 до 1918 року, доктор чистої математики з 1911 року, академік УАН з 1920 р. — такі дальші дати його трудового та наукового шляху.

На студентській лаві Юрій Васильович захоплювався фізикою та механікою. По закінченні університету він, під впливом В. П. Єрмакова та Б. Я. Букреєва, заглибився в алгебру, головно в теорію груп. Наслідком цих студій була його перша дисертація та кілька інших праць.

Перейшовши далі до вивчення алгебричних кривих та поверхень, він здобув ряд результатів, публікованих окремими статтями, а 1911 року він звів основні свої здобутки з цієї галузі у праці — «Представление областей особенных точек алгебраических поверхностей рядами, расположенными

* Акад. М. Кравчук, акад. М. Крилов, Г. Дрінфельд, проф. Є. Ремез // Вісті УАН. — 1935. — № 5. — С. 63–68.

по целым положительным степеням двух параметров» (1911), за яку й одержав ступінь доктора математики. У цій праці Ю. В. Пфейфер здобув для околу особливої точки алгебричної поверхні розвинення одної координати по степенях двох інших і розвинення двох координат по степенях третьої; дав повне дослідження околу так званої уніпланарної точки; дав розвинення двох координат по степенях третьої вздовж кратної лінії, яка проходить через такої самої кратності уніпланарну точку; розробив практично зручні способи розвинень.

Далі він звернувся до того обсягу, що вже віддавна притягав його увагу і згодом здобув йому авторитет та почесне ім’я в науці, а саме — до теорії інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Перші результати Ю. В. Пфейфера в цій галузі стосувались теорії інтеграла одного рівняння та системи рівнянь. Він дослідив зв’язок між інтегралами Софуса Лі та Лягранжа, дав строгий виклад теорії повного інтеграла, побудував повні інтеграли Лягранжа для одного та системи лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку одної невідомої функції. Юрію Васильовичу вдалося збудувати таку теорію інтеграла, що охоплює теорії Лі та Лягранжа. Пізніше він дав нове узагальнення інтеграла Лі в застосуванні до систем нелінійних рівнянь багатьох функцій та з’ясував зв’язок між інтегралом Лі та інтегралом Гамбургера.

Дослідам над теорією інтеграла ювіляр присвятив близько десятка праць, опублікованих у Союзі та за кордоном. Вони здобули авторитетне визнання багатьох фахівців, серед них Ф. Енгеля, найкомпетентнішого знавця творів Софуса Лі.

Глибоке вивчення теорії інтеграла дало Ю. В. Пфейферу базу для побудови дальших дослідів. Зокрема, воно привело його до нового способу інтегрування рівнянь; Юрій Васильович назвав його «особливим способом». Ювіляр використав цей спосіб, щоб упорядкувати питання про розділ змінних за Імшенецьким, застосував його до інтеграції нелінійних рівнянь та систем лінійних і нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку одної функції.

Велику кількість дослідів присвятив ювіляр задачі про визначення всіх диференціальних операторів, що дозволяють по інтегралу однорідного диференціального рівняння будувати нові його інтеграли. Цю задачу Гурса в свій час назвав задачею Бюля. Вона привертала увагу багатьох математиків, але тільки Ю. В. Пфейфер дав повне і остаточне її розв’язання, як це визнали сам Бюль, Картан та багато інших компетентних у цьому питанні вчених. На Цюріхському міжнародному конгресі математиків (1932) Бюль доповідав спеціально про праці відсутнього Ю. В. Пфейфера, на знак особливої до них пошани.

Великої уваги заслуговують досліди ювіляра, присвячені взагальненню методів інтегрування Якобі та Якобі — Майєра. Це взагальнення не вдалося в свій час Ейлерові та багатьом іншим дослідникам. Ю. В. Пфейфер здобув його, завівши поняття про послідовно-повні системи рівнянь. Ці досліди Ю. В. Пфейфера надзвичайно швидко здобули собі високу оцінку та загальне визнання.

Відзначаємо тут ще результати дослідів ювіляра з теорії інтегральних інваріантів та контраваріантних функцій.

Ювіляр невтомно працює й далі над численною тематикою, залучає до своєї роботи молоді талановиті математичні сили, додаючи до своєї слави дослідника почесне ім'я вихователя нових наукових кадрів.

Побажаймо йому ще довгі роки працювати на користь науці, на користь соціалістичній батьківщині!

Б. Я. БУКРЕЄВ (З НАГОДИ 50-ЛІТТЯ НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ)*

Ім'я Бориса Яковлевича Букреєва нерозривно зв'язане з другим півстоліттям існування Київського університету. В історії розвитку математики в Києві Б. Я. Букреєву належить визначне місце першого з тих математиків, які, порушуючи обмежені традиції старої київської математичної школи, пішли новими шляхами, переносячи нові ідеї та досягнення європейської науки на київський математичний грунт. З нагоди 50-літнього юбілею наукової та педагогічної діяльності Б. Я. Букреева розглянемо тут коротко шляхи розвитку цієї діяльності Б. Я.

Понад 100 праць з різних галузей математики і велике число вихованих Борисом Яковлевичем учнів, серед яких чимало таких, імена яких у науці відомі не лише у нас в СРСР, але й за кордоном (акад. О. Ю. Шмідт, акад. Ю. В. Пфейфер, акад. М. П. Кравчук, проф. М. Г. Чебогарьов, проф. І. Я. Штаєрман, проф. Б. Делоне та ін.) — такий результат цієї 50-літньої роботи Б. Я.

Б. Я. Букреєв народився в 1859 р, в м. Льгові кол. Курської губернії. Батько Б. Я. був учителем історії та географії. Скінчивши класичну гімназію в Курську, Б. Я. 18-літнім юнаком вступив до Київського університету на фізико-математичиий факультет. Під час навчання слухав: математику — у професорів Єрмакова і Ващенка-Захарченка, механіку — у проф. Рахманінова та ін. Тут уже в основному формуються наукові інтереси Б. Я., хоч у цей період студентського життя він

* Акад. М. Крилов, акад. М. Кравчук, акад. Ю. Пфейфер, Б. Рибаков // Вісті УАН. — 1935. — № 5. — С. 67–72.

інтересується не тільки математикою, а й цілим комплексом природничих наук.

Університет Б. Я. закінчив 1882 р., одержавши золоту медаль за конкурсну роботу з механіки на тему: «Теорія руху плоскої фігури в її площині». Після цього Б. Я. залишено при університеті для підготовки до професорського звання. У цей період (1882–1887 рр.) Б. Я. вивчає, головним чином, теорію аналітичних функцій та вищу геометрію.

В 1887 р. Б. Я. успішно обороняє дисертацію на ступінь магістра математики. Ця дисертація — «Розклад трансцендентних функцій на елементарні дроби» викладає основні результати Weierstrass'ової теорії аналітичних функцій, що на ті часи не була достатньо відома широким колам математиків. Дисертація подавала ряд нових конкретних результатів та з'ясовувала деякі неясні місця в теорії аналітичних функцій і взагалі являла собою помітний вклад у тогочасну російську математичну науку.

З 1887 р. по 1889 р. Б. Я. перебуває в науковому відрядженні за кордоном. У Берлінському університеті він слухає лекції таких найвидатніших математиків та фізиків XIX ст., як K. Weierstrass, L. Kroneker, J. Fuchs, H. Helmholtz, Kundt та ін. Під впливом цієї блискучої плеяди учених складаються основні інтереси і стремління молодого ученого.

Особливе, виключне враження справили на Б. Я. праці і дослідження J. Fuchs'a. Перебуваючи цілковито під впливом його ідей і інтересів, він обирає своїм основним завданням вивчення та розробку теорії т. зв. фуксових функцій. За безпосереднім керівництвом J. Fuchs'a Б. Я. пише свою докторську дисертацію — «Про фуксові функції нулевого ранга з симетричним основним поліномом» і успішно обороняє її в 1889 р., здобуваючи звання доктора математики.

В цій дисертації Б. Я. вивчає певні типи фуксових функцій. Ця тема в той час стояла в центрі уваги багатьох математиків світу; досить лише згадати хоч би відомі дослідження H. Poincare. Дисертація популяризувала ідеї Fuchs'a і Poincare, а також з'ясувала ряд нових проблем у теорії.

Після оборони дисертації Б. Я. в тому ж таки 1889 р. одержує кафедру математики в Київському університеті, а кількома роками пізніше одержує також кафедри математики на Вищих жіночих курсах та в Київському політехнічному інституті. Протягом наступного десятиліття Б. Я. продовжує дослідження в теорії аналітичних функцій, працюючи одночасно над проблемами вищої та диференціальної геометрії. З численних праць цього періоду відзначимо такі: 1) «Про розділ кореня одного класа цілих трансцендентних функцій» (1892 р.) і 2) «Формула для елементу поверхні постійної кривини в симетричних координатах».

З 1900 по 1914 р. Б. Я., провадячи інтенсивну наукову та педагогічну діяльність, працює і над виданням підручників. Ці підручники в російській математичній літературі були здебільшого першими підручниками з тих питань, яким вони були присвячені, і довго користувались заслуженою популярністю.

З моменту Жовтневої революції Б. Я. заглиблюється в організаційну роботу, допомагаючи будувати нову радянську школу.

Радянська влада створила якнайсприятливіші умови для науково-педагогічної діяльності Б. Я. Отже, цей період роботи Б. Я. характеризується значною інтенсивністю. Заглиблюючись у проблеми одної з найцікавіших дисциплін математики, у проблеми варіаційного числення, він дає більше десятка праць у цій галузі, одночасно видаючи прекрасний підручник по варіаційному численню.

Енергійний і бадьорий, справедливо визнаний кращим ударником в університеті, умілий організатор і керівник сектору геометрії Інституту математики УАН, Б. Я. невтомно працює над вихованням нових радянських педагогів та наукових робітників.

Побажаємо ж йому і далі ще довго, з незмінним успіхом, працювати на користь нашої прекрасної соціалістичної батьківщини, готуючи нові і нові кадри радянській вчених-математиків!

ІЗ РОБОТИ СЕКТОРУ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ УАН*

На двох останніх сесіях Української Академії Наук (березень та червень 1935 р.) мені довелось доповідати про новоздобуті результати в проблемі моментів. Обидві доповіді стосуються такого основного питання:

Нехай $P(x)$ *є монотонна функція на інтервалі* (a, b), $p(x)$ *— функція невід'ємна на тому самому інтервалі. Нехай існують рівності*

$$\int_a^b x^k dP(x) = \int_a^b x^k p(x)dx, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{*}$$

Визначити верхню межу модуля різниці між функціями

$$P(x) - P(a) \ \text{та} \int_a^b p(x)dx \tag{1}$$

залежно від диференціальних властивостей функції $f(x)$.

Виявилось, що порядок мализни цієї різниці можна подати точно за допомогою двох відомих у науці результатів: 1) нерівності Чебишова — Маркова, що в свій час лягла в основу дослідів А. Маркова над граничною теоремою теорії ймовірностей, та 2) нерівності Lebesgue-а в теорії рядів Fourier та апроксимації функцій, яка твердить, що мализна найкращої тригонометричної апроксимації n-го порядку функції на скінченному інтервалі — від мализни її апроксимації сумою Fourier n-го порядку — відрізняється щонайбільше чинником $\frac{1}{\ln n}$. Остаточний результат доповіданого досліду виглядає так:

$$\left| \int_a^x dP(x) - \int_a^x p(x)dx \right| < \frac{b-a}{n} \left\{ AM[p(x)] + BM\left[p\left(x + \frac{\theta}{n} \right) - p(x) \right] \lg n \right\}, \tag{2}$$

$$(0 \le \theta \le 1)$$

---

* Вісті УАН. — 1935. — № 8–10. — С. 145–150.

Тут A та B є абсолютні сталі величини, а знак $M[\ ]$ означає максимум модуля; таким чином, $M\left[p\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-p(x)\right]$ при довільному θ в межах від 0 до 1 є не що інше, як модуль суцільності функції $p(x)$.

З нерівності (2) випливає, напр. такий висновок: порядок мализни різниці

$$\int\limits_a^x dP(x)-\int\limits_a^x p(x)dx$$

є не нижчий від 1 щодо $\frac{1}{n}$, коли функція $p(x)$ на інтервалі (a,b) справджує нерівність

$$\left|p(x+\vartheta\alpha)-p(x)\right|<\frac{K}{\left|\lg\alpha\right|}\quad(\left|\vartheta\right|\leq 1), \tag{3}$$

де K є величина стала.

У загальнішому випадку:

$$a=-\infty, b=+\infty, \tag{4}$$

особливо важливому для теорії ймовірностей, нерівність (2) заміняється складнішою: на правій стороні з'являється ще один доданок, мализна якого залежить від того, наскільки швидко збігається інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx.$$

Напр., коли

$$p(x)<e^{-Bx^2}\quad(B>0) \tag{5}$$

то у випадку (4), за умови (3) маємо нерівність:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x} dP(x)-\int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx\right|<\frac{Q}{\sqrt{n}},$$

де Q є величина стала.

За умови (5) нерівність (6) дальшому уточненню не піддається.

Нерівність (2) та її взагальнення на випадок нескінченних меж — визначаються подібною ж властивістю, отже вони до кінця розв'язують поставлену в указаних доповідях апроксимаційну задачу — таксамо як класичні результати Джексона та С. Бернштейна роблять це в теорії апроксимації функцій многочленами та тригонометричними сумами.

Нарешті, в доповіді на червневі сесії УАН трактовано й ще загальніший випадок, коли рівності (*) справджуються лише *наближено*.

Здобуті результати дають змогу переглянути й уточнити класичні застосування проблеми моментів у теорії ймовірностей, зокрема довести з точними оцінками похибок теореми Маркова та Ляпунова про розподіл вартостей середнього арифметичного незалежних величин.

Другий напрям робіт сектору щодо проблеми моментів можна схарактеризувати такою теоремою (доповідано на пленумі Інституту математики УАН в лютому ц. р.):

Коли Кристофелеві числа 1-го, 2-го та n*-го порядків механічних квадратур Гауссового типу відповідно рівні, то поміж характеристичними функціями* $p(x)$ *та* $q(x)$ *тих квадратур є зв'язок:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx = \left|a\right| \int_{-\infty}^{+\infty} x^k q(ax+b)dx, \quad \mathrm{k} = 0, 1, ..., 2n-1$$

при належно дібраних числах a *та* b.

Звідси, напр., випливає, що з точністю до лінійного перетворення незалежного змінного квадратура Гауссового типу на скінченному інтервалі цілком визначається всіма своїми Кристофелевими числами; що з усіх квадратур Гауссового типу єдина Ермітова має Кристофелеві числа всякого порядку, рівні поміж собою.

Докладно та з доводами всі названі результати викладено в працях, що друкуються в перших двох книгах «Журналу Інституту математики УАН» за 1935 р.*

Над дальшою розробкою цих тем працює наукова молодь Інституту математики.

* [Попередні повідомлення опубліковано в Comptes Rendus Паризької Академії Наук (1935) [Sur quelques inégalités dans le problème des moments // C. r. Acad. sci. — **200**. — P. 1567–1569] та в «Докладах Академии Наук СССР» (апрель, 1935) [Об одной алгебраической задаче в проблеме моментов // Докл. АН СССР. — **2**, № 2. — С. 89–93.]

О РАБОТАХ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК УССР *

Институт математики Академии наук УССР основан в 1934 г. Он объединил комиссии, созданные при кафедрах прикладной математики, математического анализа и математической статистики в период 1919–1930 гг. Как в смысле личного состава, так и в смысле круга разрабатываемых вопросов Институт в значительной мере является продолжателем работы названных кафедр и комиссий.

Продолжая традиции алгебраической школы, созданной в Киеве в начале XX в. академиком Д. А. Граве, Институт работает над проблемами теории алгебраических чисел, алгебраических функций и их связи с высшими трансцендентными (Д. А. Граве), над вопросами линейной алгебры (М. Ф. Кравчук, А. С. Смогоржевский), алгебраического и приближенного решения уравнений (Граве, Кравчук, С. М. Кулик), распределения нулей и полюсов аналитических функций (Кравчук, В. И. Можар).

Следует особо отметить проводимую в настоящее время большую работу над созданием фундаментального трактата по алгебре во всех ее разветвлениях, со включением разнообразных разделов современной теории чисел, с одной стороны, и близких к проблемам алгебры вопросов анализа — с другой (Граве); разработку нового, очень общего способа приближенного решения уравнений (Граве); построение всех групп коммутативных матриц любого порядка и второй степени, всех групп коммутативных матриц до седьмого порядка (Кравчук, Я. С. Гольдбаум).

Ведется большая работа по аппроксимациям в смысле Чебышева, давшая ряд новых общих результатов, а также эффективных вычислительных приемов и важных формул (Е. Л. Ремез). Решен вопрос о порядке приближения интеграла линейного дифференциального уравнения по способу моментов (Кравчук), о порядке точности задания интегральной функции распределения ее первыми $2n$ моментами (Кравчук). Дан ряд новых результатов в области интерполяция и механических квадратур (И. Я. Штаерман, Ю. Д. Соколов, Кравчук), а

* Успехи мат. наук. — 1937. — Вып. 3. — С. 249–251.

также их применения к числовому приближенному решению дифференциальных и интегральных уравнений (Штаерман); решен вопрос об определении механической квадратуры гауссова типа ее кристоффелевыми числами (Кравчук).

В течение ряда лет разрабатываются общие большие вопросы интегрирования уравнений с частными производными с одной и несколькими неизвестными функциями (Г. В. Пфейффер, М. К. Куренский, Г. И. Дринфельд). Создана теория интегралов уравнений с частными производными, заключающая в себе и интегралы Лагранжа и интегралы С. Ли (Пфейффер); разработан «особый способ» интегрирования (Пфейффер), решена задача Бюля (Пфейффер). Обобщено понятие интеграла С. Ли на случай задачи со многими неизвестными функциями и исследована связь между интегралами С. Ли и интегралами Лагранжа (Пфейффер). Существенно продвинута вперед теория интегральных инвариантов (Дринфельд).

Исследован вопрос об инвариантных свойствах линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными по отношению к дробным линейным преобразованиям (Граве).

Работа Института в области аналитической теории дифференциальных уравнений сосредоточена преимущественно вокруг вопросов о движении материальных точек под влиянием сил взаимного притяжения по закону Ньютона и по законам более общим (Соколов, В. Е. Дьяченко). В частности, установлены условия общего соударения трех тел, двигающихся под влиянием ньютоновых сил (Соколов); обобщены условия двойного соударения на случай сил более общих (Соколов); исследовано движение материальной точки под влиянием центральной не ньютоновой силы (Дьяченко).

С помощью привлечения эйлеровых уравнений

$$x^2(a+bx^n)y''+x(c+dx^n)y'+(f+gx^n)y=0,$$

$$x^2(a+bx^n+cx^{2n})y''+x(d+ex^n+\varepsilon x^{2n})y'+(f+gx^n+jx^{2n})y=0$$

углублены и упрощены результаты теории классических типов линейных дифференциальных уравнений, определяющих специальные функции математической физики (Граве).

Даны новые результаты, относящиеся к интегрированию систем дифференциальных уравнений первого порядка вблизи особой точки (И. Б. Погребысский).

Из области приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений следует отметить работы, дающие полное определение верхней и нижней границ приближения (Ремез); разработку метода моментов для линейных уравнений, обыкновенных дифференциальных, интегральных и уравнений с частными производными математической физики (Кравчук, Штаерман, Можар, Смогоржевский, Д. Б. Тополянский, К. Я. Латышева); развитие методов Штермера (Штаерман) и Дуффинга (Соколов).

Как результат дальнейшей разработки метода моментов, дающего широкое обобщение способа В. Ритца, получается обобщение вопроса о характеристических числах и фундаментальных функциях с применением к решению общих (а не только самосопряженных) линейных задач математической физики (Кравчук).

Произведены исследования о функции Грина и ее обобщениях (Смогоржевский, Кравчук, Латышева); ведутся работы, относящиеся к различным специальным функциям математической физики и их применениям (Граве, Дьяченко, К. Бреус, С. Ф. Фещенко).

Производятся разработка и синтез многих разделов вариационного исчисления (Б. Я. Букреев), дифференциальной и неевклидовой геометрии (Букреев, Б. М. Рыбаков); начата работа по вопросам топологии (Рыбаков).

Работы Института по вопросам механики трактуют как классические проблемы, так и релятивистские. Отметим исследования, относящиеся к задаче Пуанкаре о движении электрона в поле магнитного полюса (Дьяченко): решение некоторых вопросов релятивистской небесной механики (Дьяченко); исследование влияния электромагнитных сил на движение планет, в частности Меркурия (Граве, Соколов); о задаче многих тел (Соколов); о различных задачах динамики твердого тела, гидро- и аэродинамики, малых колебаний в сопротивляющейся среде (Граве).

Упомянем о новой трактовке способа наименьших квадратов, из которой классическая вытекает как частный предельный случай (Кравчук); исследования об ортогональных многочленах, связанных с различными дискретными распре-делениями вероятностей (Кравчук, Смогоржевский, Кулик); о теореме Ляпунова (Кравчук); о вопросах корреляции и многомерных распределений (Кравчук, Латышева).

Большие исследования произведены но прикладной теории упругости; в частности, отметим расчеты общих случаев устойчивости арок и новую теорию тонкостенных оболочек с расчетом их на устойчивость (Штаерман).

Решен ряд практических вопросов, касающихся распределения магнитных масс в земле, турбин, гребных колес, конструкции аэропланов (Граве); различных вопросов электротехники (А. Л. Наумов), оптических приборов (Дьяченко).

Многие работники Института (Граве, Штаерман, Наумов, Смогоржевский, Погребысский, Можар) осуществляют живую связь математики с техникой, направляя свои научные интересы в сторону задач, актуальных для индустриализации страны, социалистического сельского хозяйства, обороны. По идее директора Института акад. Д. А. Граве и под его руководством Институт привлекает к своей работе теоретические и практические инженерные силы, а также держит постоянную научную связь с институтами физики (Дьяченко), химии (Можар) и химической технологии (Кулик) Академии наук УССР.

МИХАЙЛО КРАВЧУК ЯК ІСТОРИК МАТЕМАТИКИ *

М. І. КРАТКО

У цьому році виповнюється 120 літ від народження нашого земляка-волинянина Михайла Пилиповича Кравчука (народився у с. Човниця Ківерцівського р-ну, середню освіту здобув у Луцькій чоловічій гімназії) і 70 років від його трагічної смерті. Академіка М. Кравчука знають як талановитого вченого, який зробив вагомий внесок у різні розділи математики та її застосувань. Із численних розвідок, присвячених аналізові внеску Кравчука в науку, відзначимо дослідження акад. О. С. Парасюка і проф. Н. О. Вірченко.

Досі менше уваги надавалося публікаціям М. Кравчука з історії математики та популяризації досягнень науки. Хоч Н. О. Вірченко видала основні з них у вигляді ошатно оформленої книжки «Михайло Кравчук. Науково-популярні праці» (К., 2000), автори, які пишуть про його діяльність, рідко звертаються до неї. Можливо, тому і вчителі математики не часто користуються нею при підготовці уроку. Мета цієї публікації — привернути увагу вчителів математики, фізики та хімії до вказаної книги, у якій вони знайдуть багато матеріалу, що зробить їхні уроки цікавими й захоплюючими. Викладаючи ту чи іншу тему, вчитель математики нерідко звертається до історії цієї науки і розповідає учням, кому ми завдячуємо, що те чи те математичне поняття, відкриття, про яке йдеться на уроці, увійшло у вжиток. Такі відступи з позицій педагогіки мають велике значення: вони активізують сприймання матеріалу. Особливо, коли особа, про яку йдеться, є нашим земляком-українцем.

На жаль, українська наука до 20-х рр. XX ст. не мала власного обличчя: українських наукових установ і україномовних наукових ви-

---

* Педагогічний пошук. — 2012. — № 1 (73). — С. 3–8.

дань майже не існувало*. Викладання у середніх та вищих навчальних закладах (гімназіях і університетах) велося польською або німецькою мовами в Галичині, російською — на території Російської імперії. Учені — українці за походженням зараховувалися відповідно до польської чи російської науки. Наприклад, називаючи Лобачевського російським ученим і не сказавши, що його предки походять із Вінничини (с. Животів), хоч сам він народився уже в Нижньому Новгороді, вчитель «обрубує» його українські корені і робить зі зрусифікованого українця природного росіянина. Таких «іноземних учених», які насправді є українцями, у світі багато. Серед математиків найвідоміші М. Остроградський і Г. Вороний. Перший з них народився на Полтавщині, другий — на Чернігівщині.

Праці з історії математики бувають двох видів: 1) інформативні — у яких міститься інформація про певну подію в математичному житті (конгрес, з'їзд) або про стан досліджень у тому чи іншому колективі математиків за певний період без глибокої аргументації оцінки результатів; 2) дослідницькі — у яких висвітлено зародки тих чи інших розділів математичних досліджень і показано процес розвитку їх до сучасного стану. Публікацій першого виду в М. Кравчука чимало (список наведено нижче), другого — одна: «Вплив Ейлера на дальший розвиток математики».

Спершу коротко зупинимося на двох працях інформативного характеру: «Математична наука на Україні (за десятиріччя 1918–1928)» і «Математика та математики в Київському університеті за сто років (1834–1934)».

Стаття «Математична наука на Україні (за десятиріччя 1918–1928)» була надрукована в тижневику «Українські вісті», який видавав у Парижі Ілько Борщак†. У ній Кравчук пише, що основними завданнями, які тоді стояли перед українськими математиками, було: 1) творення української

* Україномовні періодичні видання Наукового товариства ім. Т. Шевченка у Львові були, в основному, присвячені українознавчим студіям. Про українську науку як окрему гілку світового дерева науки почали говорити тільки після 1918 р., коли в Києві було створено Українську академію наук.

† Ілько Борщак (1892–1959) був одним з тих українських емігрантів, які щиро повірили, що радянська влада принесе добробут українському народові, а процес українізації підніме рівень його культури і науки. Тижневик «Українські вісті» пропагував досягнення Радянської України.

математичної термінології та україномовних підручників математики; 2) організація та розвиток дослідницької роботи.

Щодо першого завдання дізнаємося: до його виконання математична підкомісія термінологічної комісії УНТ приступила ще в 1917 р. Пізніше вона стала математичною секцією природничого відділу Інституту української наукової мови ВУАН, і цей інститут уже видав 2 томи «Математичного словника», а третій — у друку. Сказано також, що, крім київських математиків, проблемами термінології зайняті математики Львова (в НТШ) і Одеси. Україномовних підручників і методичних посібників з елементарної математики було видано до 1927 р. приблизно 100 назв, правда деякі з них — це переклади з російської. На черзі стоїть видання спеціального журналу, присвяченого викладанню та методиці математики.

Що стосується викладання математики українською мовою, то, за словами Кравчука, справи тут такі: <1, 1–2> [*] В інших містах, де є вищі школи, <1, 3–4>.

Стосовно другого завдання — дослідницької роботи — автор інформує, що вона сконцентрована в трьох містах: у Києві на чотирьох кафедрах II відділу ВУАН, у Харкові — на трьох кафедрах і в Одесі — на одній кафедрі. Про конкретні результати, одержані українськими математиками, у статті не йдеться, і це зрозуміло, враховуючи характер видання. Кравчук пише: <1, 5–6>.

Про авторитет українських математиків у світі свідчить те, що їх запрошують читати лекції в закордонних університетах: С. Бернштейн читав курс у Сорбонні, М. Крилов — у Португалії, університеті м. Коїмбрі.

Окремо відзначає Кравчук зв'язок математиків Радянської України з українськими математиками Львова. Він пише: <1, 7–8>.

Статтю «Математика та математики в Київському університеті за сто років (1834–1934)», як видно з її назви, було написано до сторічного ювілею вишу. Кравчук пише: «Єдиною вищою школою в Києві до заснування університету (1834) була духовна академія, заснована на початку 17-го століття[†]. Були часи, коли в академії працювали досить

[*] Тут і далі позначення <1, *n–m*> означає цитату із статті «Математична наука на Україні (за десятиріччя 1918–1928)» цього збірника, між виносками *n* та *m*.

[†] Насправді на початку XVII століття (1615 р.) у Києві при Братському Богоявленському монастирі була заснована Братська школа, 1632 р. об'єднана з Лаврською школою в *гімназіум,* який згодом став називатися Києво-Братською колегією.

видатні професори, фахівці з математичних наук, що стояли на деяких ділянках на рівні сучасних їм досягнень науки; із таких постатей можна у 18-му столітті назвати математика Фальківського*». Процес розвитку математичних досліджень у Київському університеті Кравчук поділяє на шість періодів, відповідним був тоді й рівень викладання цієї дисципліни.

Перший період (1834–1852) названо коментаторським. Тоді професорами математики були С. Вижевський і Г. Гречина, випускники Віленського університету, Н. Г ренков і А. Тихомандрицький, випускники Петербурзького педагогічного інституту, А. Дяченко і М. Дяченко, випускники Харківського університету. Уся діяльність — і педагогічна, і наукова — цієї першої групи київських університетських математиків зводилася до популяризації та коментування результатів, здобутих зусиллями корифеїв попередніх поколінь, результатів не сьогоднішнього дня в науці, пише Кравчук.

Другий період (1852–1870) — компіляторський. Професорами математики в університеті стали перші його вихованці: М. Ващенко-Захарченко і П. Ромер. Крім них, математику викладав випускник Московського університету І. Рахманінов. Математики цього періоду вже намагаються зв'язатися з великими центрами математичної думки: Рахманінов друкує свої праці в «Journal des Mathematique pures et appliquees», «Zeitschrift fur Mathematik und Physik», у петербурзьких та московських виданнях; Ващенко-Захарченко — в «Quaterly Journal of pure and applied Mathematics», «Memoires de la Societe des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux», «Математическом сборнике». Рахманінов, Ромер і Ващенко-Захарченко беруть участь у наукових з'їздах, не раз бувають у наукових закордонних відрядженнях. У пла-

---

У 1694–1701 рр. цей навчальний заклад отримав статус і юридичні права академії. Після смерті митрополита Петра (Могили) за іменем «старшого брата, охоронця, наглядача й заступника» колегія стала зватися Києво-Могилянською академією. В 1819 р. її було реорганізовано в Київську духовну академію.

* Іриней Фальківський (1762—1823) — єпископ, учений-просвітник і астроном. Народився в Білоцерківці (Полтавська обл.), навчався в Києво-Могилянській академії (1773), Пресбурзькій гімназії в теперішній Братиславі (1777), Пештській королівській гімназії в Будапешті (1778). У 1782 р. закінчив філософську освіту в Офенському університеті (Будапешт), а потім (1783) вивчав богослов'я в Києво-Могилянській академії. Протягом двадцяти літ викладав у ній різні предмети: арифметику, алгебру, геометрію, астрономію, поетику, граматику, німецьку мову, богослов'я.

нах викладання з'являються нові курси: теорія чисел, еліптичні функції, основи неевклідової геометрії. Характерна риса цього періоду — добра ерудиція професури і незначні самостійні творчі зусилля. Навіть Ващенко-Захарченко, бувши добрим знавцем історії математики, не зробив у цій галузі жодного важливого відкриття, а обмежився численними публікаціями компілятивного характеру.

Третій період (1870–1890) — його Кравчук назвав *творчим зростанням* — почався у 1870 р. блискучим дебютом молодого професорського стипендіата (аспіранта) В. Єрмакова, який відкрив нову ознаку збіжності рядів, відому нині як ознака збіжності Єрмакова. Василь Петрович Єрмаков народився 1845 р. на Чернігівщині. Середню освіту здобув у Чернігівській гімназії, а вищу — в Київському університеті. Захистивши магістерську (1874) і докторську (1877), дисертації, кілька десятків років був професором університету та викладав математику в інших київських вузах. Його наукові праці стосуються диференційних рівнянь, звичайних та з частинними похідними, теорії функцій комплексної змінної, теорії ймовірностей, варіаційного числення, геометрії, механіки та ін. Багато уваги присвячував Єрмаков справі викладання математики, елементарної та вищої. Ще одним відомим професором-математиком в університеті був його вихованець Б. Букреєв, який плідно працював у багатьох відділах математики, зокрема, вищої алгебри, варіаційного числення, теорії поверхонь. Ці особи — Єрмаков і Букреєв — були центральними постатями третього періоду становлення київського математичного світу.

Четвертий період починається у 1890 р. із заснування «Фізико-математичного товариства при Імператорському університеті Св. Володимира». Його засновниками стали Букреєв, Ващенко-Захарченко, Єрмаков, Рахманінов та ін. Товариство мало на меті працювати не тільки над розвитком науки, а займатися й питаннями викладання математики. Його членами стали відомі педагоги-методисти: К. Щербина, О. Астряб, К. Лебединцев та ін. 1890–1905 рр. був періодом підготовки значної кількості молодих наукових математичних кадрів з випускників університету. Були вони учнями видатних діячів третього періоду — професорів Букреєва і Єрмакова.

П’ятий період (1905–1917) — утворення київської математичної школи, для якої у попередньому періоді було підготовлено багато активних учених. Ця доба визначається великим творчим розмахом та різноманітністю інтересів київських математиків. У цей час на арену виходять молоді діячі Ю. Пфейффер і П. Воронець. Пфейффер створив «особливий спосіб» інтегрування лінійних рівнянь з частинними похідними, Воронець зайнявся задачами динаміки систем із так званими неголономними зв'язками, що творять особливі труднощі. Чільне місце серед діячів цього періоду належить Д. Граве. З його ініціативи у Києві почалося вивчення і дальша розробка геніальних праць Г. Вороного з аналітичної теорії чисел, дослідження у галузі алгебри і теорії чисел. Із семінару Граве вийшли відомі математики — Б. Делоне, М. Кравчук, О. Островський, М. Чеботарьов, О. Шмідт.

В останній, шостий період фізико-математичний факультет університету протягом кількох років існував у складі КІНО (Київський інститут народної освіти) і ФХМІ (Фізико-хеміко-математичний інститут). Програми з математики в них були дуже спрощеними, підготовка фахівців — далекою від задовільної. Зміни на краще почалися з 1933 р., коли було відновлено університет. Утворення університету стимулювало розгортання у його стінах і наукової математичної роботи, яка до того велася лише в УАН. В університеті працюють академіки Д. Граве, М. Крилов, М. Кравчук, Ю. Пфейффер, чимало талановитої молоді, серед них Н. Ахієзер, М. Боголюбов, О. Погребиський, Є. Ремез, О. Смогоржевський та ін. У науковій роботі беруть участь і студенти, активно працюючи в математичній секції студентського наукового товариства. Численна математична аспірантура щороку збільшує математичні кадри, які йдуть до вишів та науково-дослідних установ, не відриваючись від того наукового ідейного середовища, яке називається київською математичною школою, пише Кравчук.

Про інші інформативні публікації М. Кравчука можна судити з їхніх назв:

1. Праці катедри математики та варіяційної статистики // Зап. Київ. сільськогосподар. ін-ту. — 1927. - № 3.

2. Звідомлення з поїздки на Всесвітній математичний конгрес у Больонії та у Париж. — Львів: НТШ, 1929 (див. також: Кравчук М. Науково-популярні праці / Михайло Кравчук. — К.: [б. в.], 2000).

3. Промова на врочистому засіданні Київміськради 6. 11. 1929 // Вісті ВУАН. — 1929. — № 9–10.

4. Виступ на сесії ВУАН 15. 07. 1930 // Вісті ВУАН. — 1931. — № 3.

5. Кінцеве слово на сесії ВУАН // Вісті ВУАН. — 1932. — № 1.

6. З поточної роботи ІМ ВУАН // Вісті ВУАН. — 1934. — № 6–7.

7. Науковці вирушили в похід ім. 17 партз'їзду // За комуністичні кадри. — 1934. — 17 січ.

8. Із роботи сектору математичної статистики УАН // Вісті ВУАН. — 1935. — № 8–10.

9. Другий Всесоюзний математичний з'їзд // Вісті ВУАН. — 1935. — № 1 (див. також: Кравчук М. Науково-популярні праці / Михайло Кравчук. — К.: [б. в.], 2000).

10. Общая характеристика научных школ, существующих в ВУАН и Киевском ун-те // Тр. II Всесоюзн. математ. съезда. — Л.-М.: [б. и.], 1935.

11. О работах Института математики АН УССР // Успехи математических наук. — 1937. — Вып. 3.

Праця Михайла Кравчука «Вплив Ейлера на дальший розвиток математики» побачила світ в 1935 р. у вигляді брошури (46 с.), виданої ВУАН. Вона належить до другого — дослідницького — виду історико-математичних праць і розрахована на підготовленого читача, знайомого з сучасним станом математики. Характеризуючи Леонарда Ейлера (1707–1783) як ученого, який зробив справжній революційний вплив на подальший розвиток цієї науки, Кравчук пише: <2, 1–2>.[*]. Далі, аналізуючи праці Ейлера, головним чином його «Introductio in Analysin Infinitorum» та «Institutiones Calculi Integralis» Кравчук наводить аргументи свого останнього твердження: ідеї Ейлера стали стартовими у працях математиків наступних поколінь, не втратили вони значення і сьогодні. Викласти у короткій статті всю аргументацію Кравчука неможливо, для цього треба читати оригінальний текст.

Ми ж зупинимося лише на одній проблемі, яка гостро турбувала математиків XVIII ст., і на тому, як завдяки працям Ейлера математики наступних поколінь справилися з нею. Математичний аналіз, основи якого заклали Ньютон і Лейбніц, ще не мав того строгого обґрунтування, яке йому пізніше дали Коші та Вейєрштрасс. Критика Дж. Берклі[†] методу флюксій Ньютона і нескінченно малих величин Лейбніца, здавалося, захитала всю будову нового вчення. Чи не най-

[*] Тут і далі позначення <2, *n–m*> означає цитату із статті «Вплив Ейлера на дальший розвиток математики» цього збірника, між виносками *n* та *m*.

[†] Див.: Беркли Дж. Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику / Джордж Беркли // Сочинения. — М. : Мысль, 1978.

важливішою причиною було те, що в тодішніх математиків не було чіткого розуміння нескінченно малої величини. Аналізуючи праці Ейлера, у першу чергу «Introductio in Analysin Infinitorum», Кравчук доходить висновку, що під функцією Ейлер розумів той клас функцій, який нині називають аналітичними і які можуть бути розвинені в степеневі ряди. Вважаючи, що довільну функцію можна представити у вигляді нескінченного степеневого ряду, Ейлер писав: <2, 3–4>. Таке обґрунтування Кравчук називає «до комізму наївним». Справа в тому, пише він, що Ейлер не відчував принципового значення і потреби розробки поняття границі як основної операції аналізу нескінченно малих (хоч цим поняттям описово користувався). Тому він ніде не оперував похідними, а тільки диференціалами, і твердив: «нескінченно малі, що їх розглядають у диференційному численні, абсолютно не відрізняються від нічого». Тому й оперував, поряд зі збіжними рядами, рядами розбіжними та писав:

$$\ln x = \int_0^x \frac{dx}{x^{1+i}} = \frac{x^i - 1}{i}, \text{ або } = \frac{x^0 - 1}{0},$$

де i — нескінченно мале число. Нерідко це вело його коментаторів до ще більш «наївного комізму».

Одержавши формулу

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

Ейлер пише: «Приймемо $x = 1$; тоді наш ряд стане:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

і так далі до нескінченності; а дріб, якому цей ряд дорівнює, стане $\frac{1}{0}$. Отже, як бачимо, $\frac{1}{0}$ є числом нескінченно великим... Тому що дріб $\frac{1}{\infty}$ є часткою від ділення 1 на ∞, і ми знаємо, що коли ділене 1 поділити на частку $\frac{1}{\infty}$, або 0, то, як раніше ми бачили, одержимо дільник 0, звідси маємо нове поняття про нескінченність, а саме що вона походить від ділення 1 на 0; отже правильно буде сказати, що 1, поділена на 0, означає нескінченно велике число, або ∞. Тут треба спростувати досить поширену помилку: багато хто твердить, що нескінченно велику кількість вже збільшити не можна; та цей погляд не узгоджується з вищевказаними твердими основами. Бо якщо $\frac{1}{0}$ означає нескінченно велике число, і $\frac{2}{0}$, безперечно, в два рази більше за $\frac{1}{0}$, то звідси випливає, що нескінченно велике число може стати удвічі і навіть у декілька разів більшим».

Коментуючи це місце, російський перекладач його твору (у 1812 р.) дає таке «доведення» цього факту: «Візьмемо загальний вираз

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

Приймемо $x = 1$, і матимемо

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + \ldots + \frac{1}{0}$$

або $\frac{1}{0} = n + 1 + \frac{1}{0}$, і коли $\frac{1}{0}$ уважати величиною, то вийде $n + 1 = 0$, що є зовсім абсурдним. Якщо ж у виразі $\frac{1}{0} = n + 1 + \frac{1}{0}$ обидві частини помножити на нуль, то вийде

$$1 = (n+1) \cdot 0 + 1,$$

або $1 = 1$, що цілком справедливо; і тому що один і той самий вираз $\frac{1}{0} = n + 1 + \frac{1}{0}$ дає як правильний, так і неправильний результат, доходимо висновку, що сам цей вираз є абсурдним».

Користуючись у своїх працях поняттям диференціала, Ейлер інтуїтивно відчував важливість операції граничного переходу і користувався ним. Він писав: «Диференційне числення є метод визначати відношення зникливих приростів будь-яких функцій, коли аргументові дати зникливий приріст. Диференційне числення не так досліджує ці самі зникливі прирости, як їхні відношення та взаємні пропорції; а що ці відношення подаються скінченними числами, то слід уважати, що це числення трактує скінченні величини». Не вбачаючи ніяких принципових труднощів у тому, щоб уважати відношення $\frac{0}{0}$ конкретним числом, Ейлер лише для ілюстрації користується поняттям границі: «Оця границя є наче остаточне відношення тих приростів, є справжнім предметом диференційного числення». Так само, як у сучасній математиці, він трактував збіжність числових рядів, але це поняття не стало в нього робочим. До Ейлера трансцендентні функції — логарифми та колові — з'являлися як результат знаходження квадратур і спрямлень різних алгебричних кривих — у першу чергу кола і гіперболи. Основна ідея Ейлера — творити трансцендентні функції граничним переходом з алгебричних — виявилася дуже плідною[*].

Наскільки цей спосіб є загальним, стало зрозумілим тільки через 150 років, коли Вейєрштрасс довів, що всяку неперервну на інтервалі функцію можна подати як границю многочлена. Кравчук показує, що Ейлерові було відомо, що його функції мають властивість моногенності, тобто цілком визначаються своїми значеннями в околі будь-якої однієї точки: відомі умови моногенності Коші — Рімана є вже в одній з пізніх праць Ейлера. Ейлерова теорія тригонометричних функцій стала стартовою для К. Якобі при створенні теорії еліптичних функцій. Йому досить було перейти від еліптичних інтегралів до обернень цих інтегралів — крок, який не зробив Ейлер і який зробив Якобі. Як установив Якобі, еліптичні функції є двоперіодичними, так само як тригонометричні — одноперіодичними. Узагальнення поняття періодизму привело в кінці XIX ст. (праці Пуанкаре і Клейна) до відкриття класу автоморфних функцій, частинними випадками яких є функції тригонометричні та еліптичні. Проте, пише Кравчук, Ейлерове твердження, що основним джерелом нових трансцендентних функцій є інтегральне числення, цілком зберегло силу до наших днів.

Ще одна сторона діяльності Ейлера мала величезний вплив на подальший розвиток математики: поєднання у дослідженнях неперервного і дискретного, аналізу і теорії чисел. Ейлер був першим, хто у XVIII ст. геніально поєднав у своїй роботі ці два великі розділи математики. Після нього, і на базі його здобутків, діяли в цьому напрямі такі світила математичної науки: Лагранж, Лежандр, Гаусс, Лежен-Діріхле, Куммер, Ерміт, Чебишев, Золотарьов, Гільберт, Міньковський, Вороний.

Оцінюючи всю діяльність Ейлера, Кравчук закінчує свою працю словами: <2, 5–6>.

[*] До речі, трансцендентні функції (експоненціальні й обернені до них)(вивчав у середині XIX ст. М. Гулак, член Кирило-Мефодіївського братства, і свої результати виклав у книзі «Étude sur les Équations Transcendantes, par N. Goulak, Odessa, 1859», яка одержала високу оцінку Паризької академії наук.

У цій статті ми зачепили тільки два питання з тих, які висвітлив Кравчук про вплив Ейлера. Його праця дає читачеві набагато повнішу картину, але щоб повніше викласти її зміст, треба було б просто переписати її. Отже, радимо читати оригінальний текст Кравчука.

Знайомлячись з історико-математичною спадщиною Михайла Пилиповича, не можна не звернути уваги на те, що, починаючи з середини 30-х рр., у його публікаціях натрапляємо на нотки, які раніше не зустрічалися. Проскакують слова про занепад капіталізму, про «похід науковців» на честь чергового партійного з'їзду, про Марксів діалектичний метод у математиці. З позицій нинішнього дня, чи можна звинувачувати Кравчука у лицемірстві? Кожний учений добре знає, не міг не знати цього і Кравчук, що наукові результати одержують тільки копіткою працею, а не походами чи штурмами, навіть якщо вони й присвячені з'їздам більшовицької партії. Про діалектичний Марксів метод у математиці треба сказати трохи ширше. Його пропагували філософи-марксисти, до яких приєднувався і дехто з математиків (в Інституті математики АН УРСР — чл.-кор. М. Х. Орлов). Карл Маркс (1818–1883) справді цікавився математикою*, але ніяких публікацій у цій галузі не зробив. Після його смерті лишилися конспекти математичних праць, які він вивчав, із його коментарями, з яких видно, що суті деяких математичних операцій він просто не розумів. Як приклад, наведемо таке його твердження: «Тому що

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1},$$

а

$$\frac{1}{1-1} = 2 \cdot \frac{1}{2(1-1)} = \frac{2}{2-2},$$

то, знову-таки, $\frac{2}{0} = \frac{1}{0}$. З таким же успіхом, як за допомогою ряду одиниць на зразок

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

* Він писав: «Єдине заняття, яким я підтримую необхідну душевну рівновагу, — це математика». (Див.: Маркс К. Сочинения. — Т. 30 / К. Маркс. — М. : Политиздат. — С. 88).

можна представляти у вигляді нескінченного ряду чисел, що зростають у довільно заданому відношенні. Хоч при цьому якась частина одного нескінченного ряду може дорівнювати $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ і т. д. відповідній частині іншого нескінченного ряду, та ні перша, ні друга частини не знаходяться у якійсь пропорції з усім нескінченним рядом, і в цьому випадку можна сказати тільки те, що ряди по-різному прямують до нескінченності»*. Ф. Енгельс у «Діалектиці природи» пише, що Маркс за допомогою діалектичного методу старався розкрити таємницю, яка оточує «ще й у наш час ті величини, які використовуються у численні нескінченно малих — диференціали і нескінченно малі різних порядків», хоч ніякої таємниці у той час вже не існувало. Ставлячи Маркса поряд з Ейлером тільки тому, що і перший, і другий користувалися як збіжними, так і незбіжними рядами, Кравчук користувався іншою діалектикою, яку виражає народна приказка «чеши дідька зрідка». У цей час на голову Кравчука посипався град критики, в кожну хвилину він міг чекати арешту, і таким способом сподівався уникнути його. На жаль, цього не сталося і на 51-му році життя Михайло Пилипович Кравчук помер у концтаборі.

Література

1. Кравчук М. П. Науково-популярні праці / М. П. Кравчук. — К. : [б. в.], 2000.

2. Голгофа академіка Кравчука : зібр. документів / упоряд. М. І. Кратко. — Луцьк : ВІППО, 2011. — 308 с. : іл.

* Див.: Маркс К. Математические рукописи / К. Маркс. — М. : Политиздат, 1968.

МЕТОДИКА
МАТЕМАТИКИ

НОВИЙ МЕТОД ВИКЛАДАННЯ ЛОГАРИФМІВ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ*

1. Вступні уваги

Теоретичне обґрунтування того, що кожне число можна представити, як степінь любої основи, базується на теорії ірраціонального числа та на теорії границь.

Якщо теорію границь та теорію ірраціонального числа не пророблено, як слід, науково послідовно, ми не маємо можливості довести існування показника x у рівнянні $y = a^x$.

Базуючись на теорії ірраціонального числа та на теорії границь, такі елементарні курси алгебри, як «Алгебра» Н. Білібіна (видання 1906 року), «Начала алгебры» акад. Д. Граве (видання 1915 р.), дають теоретично обґрунтоване доведення існування степеня з ірраціональним показником, тобто забезпечують розуміння поширеного поняття про показник степеня.

Ж. Бертран в своїй «Алгебрі» (вид. 1908 р.) теорію логарифмів розглядає начебто незалежно від показникової функції. Числа і їх логарифми — «це відповідні члени двох прогресій: кратної та арифметичної». Але ж і за таким підходом до логарифмів існування логарифма для числа, яке не належить до поданої кратної прогресії, не можна довести без теорії границь та теорії ірраціонального числа.

Чи можемо ми дати в нашій середній школі таку науково обґрунтовану теорію логарифмів?

Ірраціональне число в середній школі, можна сказати, теоретично не пророблюється; учням дається лише поняття про існування так званих ірраціональних чисел.

Теорія границь пророблюється лише в десятому класі, до того ж в дуже обмеженому обсязі.

---

* М. Кравчук, Б. Малінова // Комуністична освіта. — 1936. — № 1–2. — С. 96–104.

Виноски зроблено для цитування у статті «Про методичну спадщину М. П. Кравчука».

Крім цього, з елементарного курсу алгебри середньої школи майже зовсім виключено вивчення наближених обчислень.

Через це вивчати в середній школі логарифми на вищезгаданих теоретичних засадах дуже важко.

Як же з цього становища виходять наші підручники середньої школи?

Візьмемо найбільш поширений підручник старої середньої школи: «Элементарная алгебра» А. Киселева (вид. 1916 р.).

Про ірраціональний показник сказано: «Относительно иррационального показателя мы ограничимся сообщением самых элементарных сведений» (роз. III, § 295).

У тому ж § 295 ми читаємо: «Обозначим через α_1 любое приближенное рациональное значение α, взятое с недостатком, и через α_2 любое приближенное рациональное значение α, взятое с избытком. Тогда выражение a^{α} означает число, которое больше всякой степени a^{α_1} и меньше всякой степени a^{α_2}. Если, например, $a=\sqrt{2}$, a^{α} означает число, большее каждого из чисел ряда: $a^{1,4}, a^{1,41}, a^{1,414}, a^{1,4142}, \ldots$ и меньше каждого из чисел ряда: $a^{1,5}, a^{1,42}, a^{1,415}, a^{1,4143} \ldots$»

Тут же додано: «При подробном изложении теории иррациональных показателей доказывается, что число меньшее (большее) всякой степени a^{α_1} и большее (меньшее) всякой степени a^{α_2} существует и притом только одно» (ст. 324).

Вважаємо за недоцільне подавати учням таке авторитарно-схоластичне пояснення про ірраціональний показник степеня.

Ще гірше з находженням логарифму даного числа. Так, у кінці § 297 (326 ст.) сказано: «Заметим, что последнее действие (нахождение логарифма) в элементарной алгебре не рассматривается, указывается, главным образом, его практическое применение».

Про побудову логарифмічних таблиць нічого не сказано, дано лише рецептуру, як користуватися з таблиць для обрахунків.

Подивимось, що нам дає стабільний підручник з алгебри для усвідомлення ідеї логарифмів. («Алгебра. Підручник для середньої школи»).

У відділі п’ятому II частини (розд. III, § 87) дається поняття про ірраціональний показник в такий спосіб: $10^{\sqrt{2}}$ є таке стале число, яке більше кожного з чисел ряду: $10^{1,4}, 10^{1,41}, 10^{1,414}, \ldots$ але менше кожного з чисел ряду: $10^{1,5}, 10^{1,42}, 10^{1,415}, \ldots$

Степінь a^{α} (α ірраціональне число) більше від степеня a^{α_1}, але менше від a^{α_2}.

Мабуть існування числа a^{α}, як границі, вважається автором за аксіому.

На кінці цього § 87 ми читаємо: «коли докладно розглядати теорію ірраціональних показників, то виявляється, то всі властивості показників раціональних придатні для показників ірраціональних».

У § 95 (97 ст.) сказано: «Є відділ математики, де вказують способи, як можна для всякого даного числа N знайти показник x, при якому 10^x або точно дорівнює N, або різниться від цього числа довільно мало. Користуючись з цих способів, вчені склали так звані логарифмічні таблиці, де вміщено різні числа і біля кожного з цих чисел указано показники степеня, до якого треба піднести 10, щоб дістати це число».

Що дає нашим учням таке викладання логарифмів?

Глибокого усвідомлення поняття про заміну даного числа на степінь любої основи тут немає.

Поняття про те, як побудовані таблиці логарифмів — тобто як саме вираховуються ці логарифми,— теж немає.

Отже два основних відділи теми тут не висвітлені.

Історичний шлях відкриття та розвитку логарифмів учням теж незрозумілий, бо логарифми Неперові та натуральні не згадуються, а коли і згадуються, то вони не пов'язані органічно з десятковими логарифмами.

В наслідок цього наші учні, перейшовши до вищої школи, мусять розпочинати вивчення логарифмів, як щось нове.

Як же подати нашим учням [1]логарифми без теорії границь, без систематичної теорії ірраціонального числа, але так, щоб забезпечити розуміння та органічне освоєння самої ідеї логарифмів, добути обчислювальну техніку, розуміння історичного шляху розвитку логарифмів та дати нашим учням достатню підготовку для користування з логарифмів у вищій школі?[2]

2. Наш метод вивчення логарифмів

Треба погодитись з тим, що ті розділи математики, які на даному етапі математичного знання ми не можемо теоретично-науково обгрунтувати в середній школі, слід з'ясовувати там через конкретні обчислення та наочно-графічну подачу матеріалу.

За нашим методом вивчається детально показникова функція, як основа і фундамент всієї надбудови — теорії логарифмів.

Замість доведення існування логарифма, як ірраціонального (взагалі кажучи) показника, пояснюється лише фактичними підрахунками та наочно-графічне існування цього показника, як числа з певним наближенням.

Будуємо спочатку графік показникової функції $y = a^x$ для $a = 2$, тобто графік функції $y = 2^x$ для цілих значень x, і тут же на графіку показуємо, що любе число N можна подати в формі 2^x, при чому x ми можемо на графіку наближено найти.

Висвітливши учням користь від заміни числа на степінь певної основи, показавши можливість заміни дій вищого ступеня на дії нижчого, ми приходимо до висновку, що графік функції $y = 2^x$, як і таблиця цієї функції, нас не задовольняє.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Дійсно, інтервали між значеннями функції в другому рядку таблиці занадто великі, графік неточний. Отже, нам треба відшукати таку основу, яка нам дала б досить ущільнену таблицю значень для y, а через те і більш точний графік функції $y = a^x$.

За основу a беремо число $1{,}1$. Добір основи та міркування щодо її придатності висвітлює учням, які вимоги слід ставити до основи. Нуль і одиниця, як основи, відкидаються, бо $0^x = 0; 1^x = 1$ при всякому значенню x.

Також відкидається від'ємне значення для основи, бо, наприклад, $(-2)^{0,5} = \sqrt{-2}$, тобто є число недійсне. Отже $(-2)^x$ не завжди існує серед тих чисел, в обсягу яких працюємо.

Числа, що більш віддалені від одиниці, дають більші інтервали для значень y, і ми, таким чином, встановлюємо, що за основу треба взяти число близьке до одиниці (Запитання і вправи можна найти у Р. А. Бема, А. А. Волкова, Р. Э. Струве «Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры». 1 час.).

Функція $y = 1,1^x$ дає нам, порівнюючи з функцією $y = 2^x$, більш ущільнену таблицю значень для y, коли x міняти, як і попереду, через одиницю.

Учні, як показала практика проробки за цим методом в двох школах міста Києва (49 с. ш., 50 с. ш.), самі тут же заявляють, що краще за основу взяти $1,01$, $1,001$, $1,00001$ і т. ін., [3]тобто учні самі підходять до основи типа $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, що веде до основного моменту в історії логарифмів та до числа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ і до натуральних логарифмів.[4]

Зручність основи 1,1 не тільки в тому, що вона дає більш ущільнену табличку значень для у, але ще в тому, що технічно цю основу дуже легко підносити до степеня.

Щоб $1,1$ піднести до квадрату досить 11 одиниць додати до 11 десятків, одержуємо 121, відкіля $1,1^2 = 1,21$. Щоб піднести $1,1$ до кубу, досить $1,21$ помножити на $1,1$, а це знову зводимо на додавання, а саме: треба 121 одиниць додати до 121 десятків, що дає 1333, або $1,1^3 = 1,333$ і т. д.

$$\begin{array}{r}
11\\
11\\
\hline
121\\
121\\
\hline
1331\\
1331\\
\hline
14641\\
14641\\
\hline
16105\\
16105\\
\hline
17715\\
17715\\
\hline
19486\\
19486\\
\hline
21435
\end{array}$$

Результати цих додавань ми округляємо до одної десятитисячної, а в таблицях обмежуємося лише точністю до одної десятої, щоб не ускладняти обрахунків та не одержувати ілюзорно точних результатів при дальшому практичному їх використанні.

Самі учні — під керівництвом учителя — повинні вирахувати таку таблицю:

Таблиця функції $y=1,1^x$

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
− 9	0,4	1	1,1	11	2,9	21	7,4	31	19,2	41	49,8
− 8	0,5	2	1,2	12	3,1	22	8,1	32	21,1	42	54,8
− 7	0,5	3	1,3	13	3,5	23	9,0	33	23,2	43	60,2
− 6	0,6	4	1,5	14	3,8	24	9,8	34	25,4	44	66,3
− 5	0,6	5	1,6	15	4,2	25	10,8	35	28,1	45	72,9
− 4	0,7	6	1,8	16	4,6	26	11,9	36	30,9	46	80,2
− 3	0,8	7	1,9	17	5,1	27	13,1	37	34,0	47	88,2
2	0,8	8	2,1	18	5,6	28	14,4	38	37,4	48	97,0
− 1	0,9	9	2,4	19	6,1	29	15,9	39	41,1	49	106,7
0	1	10	2,6	20	6,7	30	17,4	40	45,3	50	117,4

За допомогою цієї таблиці проводимо наближено множення, ділення, степенювання та коренювання чисел, вписуючи їх у формі $1,1^x$. Наприклад:

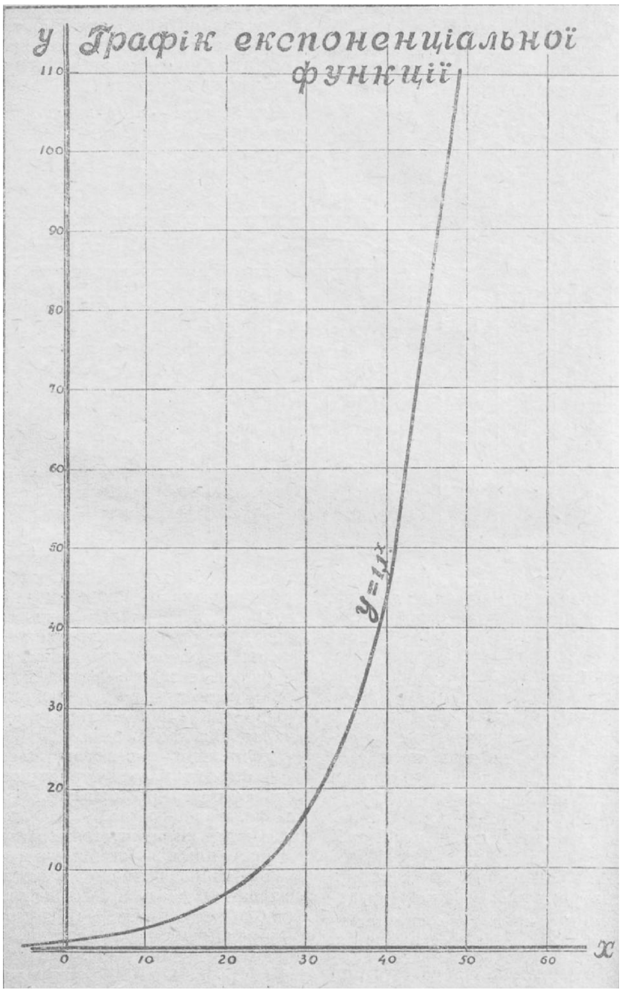
$$\sqrt[5]{17,4} = \sqrt[5]{1,1^{30}} = 1,1^6 = 1,8;$$
$$2,9^4 = (1,1^{11})^4 = 1,1^{44} = 66,3;$$

Учні відразу переконуються в корисності таких таблиць, алеж самі учні, як показав досвід проробки в школах, вимагають дальшого удосконалення цих таблиць, бо не всі числа ми можемо найти в цій таблиці.

Тоді ми переходимо до креслення досліджування графіка функції $y = 1,1^x$ і користуємося з нього замість таблиці.

Слід підкреслити, що тут непідготовленість учнів до наближених обчислень буде нам в достатній мірі заважати. Учні примушені проробляти обчислення самої таблиці і розв'язувати числові приклади без теорії наближених обчислень і, головне, без будь-якої практики в таких наближених обчисленнях, алеж це випливає з особливостей проробки математики в середній школі і буде заважати при всякому методі викладання логарифмів.

Добір основи для того, щоб одержати більш ущільнену таблицю значень функції, ми пов'язуємо з поясненням учням, що у нас є два шляхи для згущення точок графіка.



(Масштаб графіка зменшено)

Перший шлях — це більше наближення нашої основи до одиниці. Основа $1,01$ дасть нам більш ущільнену систему точок. Тут варто задати учням виготовити частину таблички для основи $1,01$.

Ще більше згущення точок дають основи: $1,001$; $1,0001$; $1,000001$ і т. д.

Другий шлях — це згущати значення x, залишивши основу $1,1$ без зміни. Так, між $1,1^2$ і $1,1^3$ ми вміщуємо: $1,1^{2,5} = \sqrt{1,1^5}$. Між $1,1^{2,5}$ та $1,1^3$ ми вміщуємо $1,1^{2,75} = 1,1^{11/4} = \sqrt{\sqrt{1,1^{11}}}$ і т. д.

Можна пропонувати окремим учням, як завдання додому, скласти сгущену табличку функції $y = 1,1^x$ для невеличкого інтервалу, міняючи значення через $0,5$ (або й, коли бажано ще більше згущати точки, через $0,25$).

Таке згущення переконує учнів тому, що при достатній ущільненості точок, ми можемо довільно зменшити похибки наших обчислень. За допомогою графіка і таблиці розв'язуємо цілу низку вправ. Наприклад:

1. $\sqrt[5]{65} \cdot \sqrt[4]{27}$. 2. $1,3^4$.

3. $\sqrt[5]{72} \cdot 1,25^3$. 4. $\sqrt[10]{84} : \sqrt[3]{1,4}$.

5. $2,7 : \sqrt[3]{48}$. 6. $(\sqrt[5]{37} \cdot \sqrt[4]{52}) : 1,5^4$.

Ці вправи допомагають учням зрозуміти користь від заміни числа на степінь будьякої основи. На графіку учні переконуються, що для кожного числа N можна знайти відповідний покажчик степеня, до якого слід піднести нашу основу, щоб одержати з певним наближенням дане число. Тут же на графіку переконуються учні в тому, що при додатній основі від'ємні числа не можна представити степенем цієї основи. Неможливість брати за основу від'ємне число було пояснено учням раніш. Всі властивості показникової функції $y = a^x$ $(a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta})$, ми даємо аналітично, а на графіку затверджуємо їх для функції $y = 1,1^x$.

Лише після такої проробки показникової функції дається поняття про логарифм, як показник степеня, до якого слід піднести основу, щоб одержати дане число.

При такому підході до поняття «логарифм», учням цілком зрозуміло, що за основу логарифмів можна взяти яке завгодно додатне число.

Графік функції $y = 1,1^x$ наочно фіксує у учнів поняття логарифма та основні властивості логарифмів.

Тут же учням можна дати історичні відомості про відкриття логарифмів, особливо про ідею та роботу Непера.

Власний добір основи для функції $y = a^x$ та міркування, що за основу ще краще, ніж $1,1$ взяти $1,01$, $1,0001$, $1,0000001$ і т. п., природно приводять учнів до розуміння Неперових логарифмів.

За графіком функції $y = 1,1^x$ ми складаємо табличку й для функції $x = \log_{1,1} y$. **Знов таки цю роботу учні повинні проробляти власними руками.*

Таблиця логарифмів при основі 1,1

Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
1	0	11	25,2	21	31,9	31	36,0	41	39,0	51	41,3	61	43,2	71	44,8	81	46,1	91	47,4
2	7,3	12	26,1	22	32,4	32	36,4	42	39,2	52	41,5	62	43,3	72	44 9	82	46,2	92	47,5
3	11,5	13	26,9	23	32,9	33	36,7	43	39,4	53	41,7	63	43,5	73	45,0	83	46,3	93	47,6
4	14,5	14	27,8	24	33,4	34	37,0	44	39,6	54	41,9	64	43,7	74	45,2	84	46,4	94	47,7
5	16,9	15	28,6	25	33,8	35	37,3	45	39,9	55	42,1	65	43,9	75	45,4	85	46,6	95	47,8
6	18,8	16	29,2	26	34,2	36	37,6	46	40,2	56	42,3	66	44,0	76	45,5	86	46,7	96	47,9
7	20.4	17	29,8	27	34,6	37	37,9	47	40,4	57	42,5	67	44,2	77	45,7	87	46,9	97	48,0
8	21,8	18	30,4	28	35,0	38	38,2	48	40,6	58	42,7	68	44,3	78	45,8	88	47,0	98	48,1
9	23,1	19	30,9	29	35,4	39	38,5	49	40,8	59	42,9	69	44,5	79	45,9	89	47,1	99	48,2
10	24,2	20	31,4	30	35,7	40	38,7	50	41,1	60	43,0	70	44,7	80	46,0	90	47,2	100	48,4

Окремо рисувати графік для функції $y = \log_{1,1} x$ не варто, тому що занадто велика кількість графіків розгубить увагу учнів, відхилить її від основного.

Графік функції $y = 1,1^x$ цілком забезпечує і обернену операцію шукання x для даного y.

Поняття логарифмічної функції теж висвітлюється в достатні мірі і на цьому графіку.

Не заперечуємо виготовлення окремого графіка для функції $y = \log_{1,1} x$, але ж пізніш, при повторенні.

Коли складено таблицю логарифмів при основі 1,1, ми приступаємо до розв'язання вправ, користуючись цією таблицею. Тут логарифмування та потенціювання проробляється, використовуючи вперше слово і поняття — логарифм (замість показника степеня). До цього моменту всі дії переводилися, як дії зі степенями числа $1,1$ (або іншої основи).

Відмітивши, що таблиця нам не дає ні логарифма любого числа, ні числа відповідного любому логарифмові, що, таким чином, нам

* В оригіналі $\log_a x$ позначено як $\lg_a x$.

доводиться робити інтерполіювання, ми учнів на графіку привчаємо інтерполіювати на око.

Далі, для пояснення лінійної інтерполяції можна використати графік, зроблений у формі ломаної лінії (якщо перенесені з таблиці точки з'єднати не кривою за допомогою лекало, а з допомогою лінійки — відрізками прямої). За допомогою такого графіка можна учням показати, наскільки значення логарифмів проміжного числа, вирахованого за допомогою криволінійного графіка, відрізняється від значення логарифма цього самого числа, вирахованого за криволінійним графіком, де точки з'єднані відрізками прямої лінії.

Тоді відмічаємо, що при досить ущільненій системі значень функції, лінійна інтерполяція дає нам достатню точність, бо здобуті нею значення логарифма проміжного числа не відрізняються від значень, узятих з криволінійного графіка.

Згадуючи графік лінійної функції, відмічаємо, що лінійна функція пов'язує величини, прирости яких прямо пропорціональні. І тут же графічно показуємо, що при достатньому згущенні точок графіка показникової функції ми частини графіка між досить близькими точками можемо розглядати, як відрізки прямої, і вважати, що прирости числа і прирости логарифма на даному інтервалі пропорціональні. На даному етапі нашої роботи з таблицями ми і інтерполяційних поправок не обчислюємо, а просто логарифми проміжних чисел беремо з графіка криволінійного або ламаного на око (Розуміється, не тут уперше треба говорити про інтерполяцію. Привчати до неї треба з моменту, коли подається графік функції $y = x^2$ та починають добувати квадратний корінь).

Таке наочне пояснення лінійної інтерполяції забезпечує нам надалі розуміння процесу інтерполіювання.

Оскільки увесь час таблиця і графік використовуються спільно, це дає нам можливість кожного разу звергати увагу учнів на те, що практично графік функції $y = 1{,}1^x$ для відрізків в межах зміни функції на одиницю, можна розглядати, які відрізки прямої, і поволі привчати до інтерполяції через обчислення насамперед в умі.

Самий процес шукання на графіку логарифмів проміжних чисел наочно показує учням, що при згущенні значень логарифма похибка при лінійній інтерполяції зменшується.

Ось зразки вправ для вживання таблиці логарифмів при основі 1,1:

1. $\sqrt[3]{30} : \sqrt[5]{20}$. 2. $6,5 \cdot 5,8 \cdot \sqrt[6]{48}$.

3. $8\sqrt[4]{17}$. 4. $15 : \sqrt[8]{45}$.

5. $\sqrt[4]{15} : \sqrt[3]{10}$. 6. $\sqrt[5]{24} \cdot \sqrt[3]{21}$.

7. $(\sqrt[4]{5} : \sqrt[3]{72}) \cdot 1,5^4$. 8. $(\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[5]{42}) : \sqrt[4]{75}$.

Учні, як показала практика роботи двох шкіл (Київські № 49 та № 50), цілком свідомо користуються з вищеподаних таблиць, виготовлених власними руками.

Якщо заміна числа на степінь основи 1,1 за допомогою як графіка, так і таблиці засвоєно, якщо засвоєно свідоме користування з власних таблиць логарифмів,— аж тоді переходимо до десяткової системи логарифмів.

Учні згадують, що основою логарифмів може бути яке завгодно додатне число, крім одиниці.

Повторюємо, які наші вимоги до основи. Розглядаємо, скільки логарифмів може мати дане число при даній основі.

Що дане число при даній основі має лише один логарифм, учні переконуються на графіку.

На суто конкретному переході від основи $1,1$ до основ $1,1^2$, $1,1^3$, $1,1^5$ і т. інш. учні переконуються, що логарифми даного числа при різних основах пов'язані між собою певним співвідношенням і що логарифми даного числа при різних основах можна звести до логарифма даного числа при основі $1,1$, поділеного на певне число. Наприклад:

$$\log_{1,1} 36 = 37,6, \quad \log_3 36 = \log_{1,1^{11,5}} 36 = \frac{37,6}{11,5},$$
$$\log_{1,1^2} 36 = \frac{37,6}{2}, \quad \log_5 36 = \log_{1,1^{16,9}} 36 = \frac{37,6}{16,9},$$
$$\log_{1,1^3} 36 = \frac{37,6}{3}, \quad \log_{10} 36 = \log_{1,1^{24,2}} 36 = \frac{37,6}{24,2}.$$

Така конкретна підготовча робота для розуміння модуля переходу від однієї системи логарифмів до другої забезпечує усвідомлення цього важкого моменту і учні розуміють що:

$$\log_{10} N = \frac{\log_{1,1} N}{24,2} = \frac{\log_{1,1} N}{\log_{1,1} 10}.$$

За допомогою модуля переходу від логарифмів при основі $1,1$ до логарифмів при основі 10, учні переводять свою табличку при основі $1,1$ на табличку при основі 10.

Порівняння власних табличок з друкованими дає учням велике задоволення.

Варто при переході до десяткових логарифмів подати учням відповідні історичні відомості.

Модуль переходу після аналітичного пояснення висвітлюється ще й графічно.

Учні вже знають, що $\log_{10} N$ ми можемо одержати діленням $\log_{1,1} N$ на $24,2$.

На графіку, якщо міняємо основу, значення y не міняється, а значення x міняється, але ж в сталому відношенні, тобто коефіцієнт відношення $\log_{1,1} N$ до $\log_{10} N$ дорівнює сталому числу $24,2$, а це ми можемо розглядати як зміну масштабу на вісі x-ів.

Якщо за одиницю на вісі x-ів для графіка функції $y = 1,1^x$ взято 5 мм, то для графіка функції $y = 10^x$, щоб ці графіки злилися в один, слід взяти за одиницю відрізок в $24,2$ раза більший, тобто 5 мм $\cdot 24,2$.

Отже, змінивши масштабну одиницю на вісі x-ів, а масштабну одиницю на вісі y-ів залишивши без зміни, ми той самий графік функції $y = 1,1^x$ можемо розглядати, як графік функції $y = 10^x$.

Після такого суго конкретного поняття про модуль переходу, можна дати загальне поняття про модуль переходу від любої основи логарифмів «a» до любої основи «b», а саме:

$$\left.\begin{array}{l}\log_a N = n;\ N = a^n;\\ \log_b N = x;\ N = b^x\end{array}\right\}\ a^n = b^x;$$

$$\log_a b = m;\ a^m = b;\ a^n = a^{mx};\ n = mx;$$

$$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b$$

або

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

При такій подачі матеріалу учні підходять до десяткових логарифмів, як до окремого випадку загальної ідеї логарифмів.

Після того, як учні самі виготували логарифмічні таблиці, робота з друкованими таблицями, для них є цілком свідомий процес.

Всі загальні властивості логарифмів учні свідомо використовують на десяткових логарифмах.

Дуже легко учні тепер зрозуміють побудову логарифмічної лінійки. Користування з графіка для обрахунків дало учням змогу звикнутися з логарифмічною шкалою, як засобом для обрахунків; залишається лише роз'яснення іншого розташування цих шкал.

Учні самі за графіком виготовляють саморобні логарифмічні лінійки.

Порівняння саморобної лінійки з фабричною — це другий момент великого задоволення для учнівського колективу.

Принцип користування з лінійки не вимагає майже окремих вказівок від учителя. Зупинятися доводиться лише на питанні про кількість знаків одержаного добутку та на моменті, коли добуток перевищує 10 і шкалу пересуваємо ліворуч.

Після такої проробки теоретичної частини, залишається третій відділ нашої теми — практичне застосування десяткових логарифмів, але це досить детально подано майже в усіх підручниках.

3. В чому перевага викладання логарифмів за нашим методом

В основі викладу лежить чітке висвітлення та органічне освоєння ідеї логарифмів — заміни чисел степенями будьякого одного числа.

Уся подача матеріалу побудована на заміні числа степенем любої основи. Беремо за основу 2, переконуємося, що така основа не забезпечує достатньої точності, обираємо за основу $1{,}1$, але ж учні певні, що ще краще було б взяти за основу $1{,}01$, $1{,}00001$ і т. інш. Нарешті, переходимо до заміни числа степенем основи 10.

Виробляється загальна ідея логарифмів, не зв'язана з певною основою. Учні не будуть збентежені, якщо після такої проробки логарифмів вони почують, що в вищій математиці пропонується за основу брати не 10, а нове число

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

відмінне від 10.

Для учнів, що опрацювали логарифми за нашим методом, ясно, що добір основи логарифмів цілком вільний, але ж обираємо ми ту або іншу основу залежно від зручності її для застосувань.

[5]Графік, що в практиці середньої школи являється не раз додатком без ділового застосування, набуває тут великого значення, як цінний засіб номографічного обчислення та наочної доброї заміни науково-теоретичного доведення, яке подати учням на даному етапі їх математичного розвитку неможливо. Ми переводимо графік з пустого і непотрібного додатку у важливий інструмент дослідження та обчислення.

Логарифмічні таблиці з таємничого приладу, поданого учням зверху, складеного неприступними засобами «вищої математики», стають учням близькими, ясними, бо вони ці таблиці самі склали.

Складання таблиць та виготовлення графіків, як всяка творча робота, захоплює учнів, дає емоціональні моменти, які допомагають закріпити нові знання.

Виготовлення логарифмічної лінійки, крім момента трудового, творчого, дає ще й грунтовне розуміння самого принципу користування з логарифмічної лінійки.[6]

У вивченні логарифмів учні ідуть шляхом, в основному, близьким до того, яким шла історія розвитку логарифмів.

Сподіваємося, що наші пропозиції дадуть змогу зліквідувати рецидів логарифмічної неписьменності, що його спостерігалося у випускників середньої школи і що за основну причину має пасивне та формально-рецептурне вивчення логарифмів у середній школі.

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ*

I. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ — ШЛЯХ ДО ОСВОЄННЯ ГЛИБОКИХ ІДЕЙ В МАТЕМАТИЦІ

До наближених обчислень більшість учителів ставиться дуже неохоче; вважають, що це суто практична, ремісничa річ («Хіба це математика? Яка тут ідея?»). Додержуючись думки, що наближені обчислення це є нижчий сорт науки, ми відступаємо на 2000–2500 років від сучасності, до тих часів, коли математики евклідової і передевклідової доби нехтували конкретними розрахунками, якщо вони не давалися точно (з раціональним результатом).

Потрібні були інтелектуальна сила і практичне чуття Архімеда, щоб в ті часи відважитися піддати небезпеці свій науковий авторитет і взятися до наближеного обчислення числа π. Цим Архімед, найгеніальніший математик та інженер античного світу, переломив традицію нехтування ідеєю наближеності в математиці.

[9]На межі XVI та XVII століть десяткові дроби набули права громадянства в математиці. Цей колосальний ідейний та технічний здобуток науки дав змогу заповнити прірву поміж ірраціональним та раціональним числом, що лишилася в математиці, як спадщина від античної науки.

Десяткові дроби дають змогу представляти ірраціональні числа через раціональні з довільною точністю; замість дій з ірраціональними числами робимо ці дії з десятковими наближеннями.

Одержуючи в десятковому дробі десяті, соті, тисячні, десятитисячні і т. д., ми разом з цим наочно подаємо процес зміни числа, що йде до своєї границі — нескінченного десяткового дроба.[10] Коли здобули для числа π перше наближення «3», то звідси ще було далеко до справжнього поняття про π, а коли в XIX ст. вирахували π з кількома

---

* М. Кравчук, М. Гельфанд, О. Вулах // Комун. освіта. — № 9. — С. 26–35.

Числові виноски зроблено для цитування у статті «Про методичну спадщину М. П. Кравчука».

сотнями цифр після коми, то цього було досить, щоб цілком споріднити нас з поняттям про π, як про певну границю.

З того часу, коли з'явилися десяткові дроби, коли гроші почали рахувати за десятковою системою, а метр ділити на дециметри і сантиметри,— нехтувати наближеними численнями стало дивним архаїзмом.

Всі згодні, що наближені обчислення мають колосальне значення в прикладних питаннях, де немає ні потреби, ні змоги робити обчислення за абсолютно точними формулами. «Можна користуватись завідомо неточними формулами і прийомами, лише була б упевненість, що похибка, яка виникає від цього, не перевищує тих меж, що в даному питанні допускаються» (акад. А. Н. Крилов).

[1]Наближені обчислення далеко небезідейна річ. В курсі математики середньої школи вони є шлях до глибоких, основних ідей вищої математики. Принцип нумерації, принцип системного запису числа, десяткові дроби, наближені обчислення — ведуть, поперше, до поняття ірраціонального числа, подруге — до поняття границі, тобто до двох понять, що вводять ідею нескінченності в курс математики середньої школи.[2]

II. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ ПОВИННІ СТАТИ ОРГАНІЧНИМ ЕЛЕМЕНТОМ НАВЧАННЯ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Наближені обчислення в курсі математики середньої школи не розроблені. В стабільному підручнику з арифметики («Збірник задач») є матеріал на елементарні наближені обчислення, а саме: на заокруглення чисел, але й цей розділ недосить глибоко пророблюється в школах. Серед студентства зустрічаємося, на жаль, з найелементарнішою неписьменністю в наближених обчисленнях — факт надзвичайно прикрий. У студентів довго зберігається вихована в середній школі неохота до наближених обчислень. Треба давати належні настанови в молодшому віці, щоб пізніше не переучувати студентів, не переборювати в них шкідливих звичок.

[11]Починаючи з легкого питання про заокруглення чисел, ми в дитячу свідомість кладемо першу цеглину ідеї нескінченності.

Ірраціональне число, як нескінченний десятковий дріб, буде опановуватися дітьми крок за кроком, через переходи від десятих долей до сотих, від сотих до тисячних, через ступневе підвищення точності наближеного числа. Дописуючи в десятковому числі праворуч долі все дрібніші (десяті, соті, тисячні, десятитисячні) і уявляючи, що кількість дописуваних цифр необмежено росте, ми пробиваємо в свідомості дітей шлях до поняття нескінченності, до правильного уявлення про ірраціональність.

Потрібен довгий пропедевтичний процес, щоб через десяткові дроби та наближені обчислення прищепити дітям поняття ірраціонального числа і границі.[12]

Наближені обчислення *повинні стати органічним, елементом курсу математики в середній школі.*

Коли наближені обчислення будемо вставляти тільки як окремі епізоди до курсу математики середньої школи, то не досягнемо результатів кращих від тих, що маємо на сьогодні: учні від одного до другого ізольованого епізоду забуватимуть дану їм рецептуру. Треба добитись, щоб учні *відчували потребу наближено обчислювати, переконалися в доцільності наближених результатів та в ефективності наближених методів.* Тоді вони не ставитимуться до наближених обчислень так, як тепер деякі студенти, що заявляють: «шкода часу, ми швидше вирахуємо точно».

Треба виробляти в учнів автоматичні звички обчисляти наближено так само, як автоматично, в значній мірі, робимо «точні» обчислення на письмі з цілими числами. [3]Наша задача — на протязі всього курсу побудувати викладання математики так, щоб на кожному кроці учні використовували наближені обчислення в задачах, щоб теоретичні питання курсу базувалися на попередніх здобутках з наближених обчислень (ірраціональні числа, дії з ірраціональностями, логарифми, рівняння вищих ступенів, обчислення об'ємів та поверхонь, границі).[4]

III. ДЕСЯТКОВІ ЗАОКРУГЛЕННЯ

Практичні задачі вимірювання натурально ведуть до поняття наближеного числа. Ніякий вимір у більшості практично не може бути зроблений абсолютно точно. При вимірюванні довжини ми не одержуємо точного числа, остача неминуча у більшості випадків вимірювання. Наприклад, вимірюють стіл у цілих метрах, дециметрах та сантиметрах,довжину кімнати вимірюють в цілих метрах та дециметрах. Може остача, що в цих випадках залишається, не має ніякого практичного значення; проте, можна було б спробувати ці величини виміряти в дрібніших мірах, наприклад, в міліметрах, в десятих частках міліметра і т. д. Так підходимо до уявлення про нескінченний десятковий дріб. Виходячи з конкретних прикладів вимірювання або зважування, викладач може призвичаїти учнів до поняття наближеного числа. Крім практичних задач вимірювання, до ідеї наближеного числа підходимо через ділення цілих чисел з остачею та через перетворення звичайних дробів у десяткові.

Ці тривіальні уваги робимо тут тому, що учителі хоч і знають про ці речі, але в практиці не досить роблять на них наголос, нехтують їх першорядним виховним та ідейним значенням.

На першій стадії вивчення наближених обчислень треба говорити про заокруглення в сотнях, десятках, одиницях, десятих долях, сотих, тисячних і т. д. Про оцінку похибки, про поняття похибки тут говорити не слід.

Заокруглення чисел треба робити на конкретних прикладах, як з цілими числами, так і дробовими. Наприклад: 1) у місті N, за даними перепису, нараховується 650.775 мешканців; заокруглити це число в десятках, сотнях, тисячах; 2) один пуд приблизно є $16,3805$ кг заокруглити в грамах, кілограмах.

Вивчення заокруглення чисел в школі слід розбити на три стадії, а саме:

1) Заокруглення точних чисел з недостачею, наприклад:

$$253 \approx 252, 200,$$

$$479 \approx 470, 400$$

2) Коли учні в достатній мірі опанують заокруглення з недостачею, тоді можна взятися до заокруглення з перевишкою, наприклад:

$$252 \approx 260, 300,$$

$$479 \approx 480, 500$$

3) Заокруглення за правилом доповнення; тут ставимо питання, як вигідніше заокруглювати в кожному окремому прикладі: чи з недостачею, чи з перевишкою, наприклад, число 253 в десятках ще заокруглити з недостачею саме: до 250; число 479 в соті краще заокруглити з перевишкою, а саме: до 500. |

Коли перша цифра з тих, що відкидаємо, менша за 5, то заокруглюємо з недостачею, наприклад, $1,33 \approx 1,3$; коли ж перша цифра зі що відкидаємо, буде 5 або більша за 5, то заокруглюємо з перевишкою, наприклад,

$$1,05 \approx 1,06; \; 1,035 \approx 1,04.$$

Заокруглення чисел треба закріпити на розв'язуванні низки практичних задач та далі скрізь систематично застосовувати.

IV. НАБЛИЖЕНЕ ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ

Коли уявлення про наближене число стане у учня робочим, звичайним поняттям і учень з своєї ініціативи охоче почне заокругли ти результати, здобуті при розв'язуванні задач, тоді думка про наближене додавання і віднімання нього стане натуральною.

Додаймо:

$$\begin{array}{r} 11,32\ldots \\ +\ \ 2,753\ldots \\ \hline 14,07\ldots \end{array}$$

Тут $11,32$ є заокруглення якогось числа; отже в ньому після цифри 2 є ще цифри, які саме — невідомо.

Раз-у-раз про це забувають, сміливо додають записані числа, розуміючи під крапками в числі $11,32$ нулі, і здобувають *начебто* точну відповідь $14,073$. Іноді ще, зрівняти розряди, дописують нулі після цифри 2 в числі $11,32\ldots$, враховуючи, що після цифри 2 же стояти не конче нуль, а буї яка цифра. Через те, що ми не знаємо, додавати до цифри 3 невідомо що не можемо. Ставлячись задачі реально, заокруглімо обидва доданки так, щоб останні розряди в них стали одноіменні. Коли $2,753$ навіть точне число, то в сумі на точне число сподіватися ніяк можна тому, що додаток $11,32$ число наближене. Тут важливо докладно з'ясувати, що наш результат $14,07$ ще не є десяткове заокруглення суми. Остання його цифра 7 непевна, тому що при додаванні цифри 3 в числі $2,753$ до невідомої цифри тисячних в числі $11,32\ldots$ може бути, наприклад, 9, могла вийти кількість тисячних більша за 10, а це вплинуло б на цифру сотих суми, тобто на останню цифру числа $14,07$.

Тому, щоб одержати результат з самими *певними* цифрами, треба його ще заокруглити. Отже, при такому *скороченому* додаванні треба пам'ятати, що остання цифра результата може бути непевна.

На даному прикладі, після заокруглення за правилом доповнення, одержуємо суму $14,1$ замість $14,07$; тут всі три цифри суми—певні.

Зробімо ще такий приклад:

$$\begin{array}{r} 3,2\ldots \\ +\ 5,931\ldots \\ \hline 9,1\ldots \end{array} \qquad \approx 9$$

Число 9 є сума, заокруглена в одиницях за правилом доповнення.

Пояснюючи цей наближений і одночасно скорочений спосіб додавання, треба робити особливий наголос на моменті раціоналізації обчислень. Замість того, щоб виконувати зайві операції з невідомими розрядами і здобувати фіктивно точні результати, додаємо числа округлені в однакових розрядах. Одержаний результат матиме непевну тільки одну останню цифру.

Так позбуваємося в відповіді фальшивих цифр, взятих «зі стелі».

Все, що говорилося про додавання наближених чисел, поширюється і на віднімання. При відніманні за цією схемою так само тільки одна остання цифра може бути непевною.

Приклад:

$$\begin{array}{r} 20,025\ldots \\ -\ 15,0024\ldots \\ \hline 5,023\ldots \end{array}$$

Остання цифра 3 різниці $5,023$ непевна. Пустивши її в заокруглення за правилом доповнення, дістанемо наближену різницю 5,02, що має всі цифри певні.

Так робимо в випадку двох компонентів при додаванні та відніманні. У випадку більшого числа компонентів всі ці міркування залишаються в силі, але результат може стати не такий сприятливий. Коли число компонентів не більше за п’ять, то в результаті з’являється знов тільки одна непевна цифра, а коли число компонентів перевищує п’ять, але не більше за п’ятдесят, то в результаті, щоб позбутися непевних цифр, треба пустити в заокруглення дві останні цифри; на першій стадії вивчення наближених обчислень про це можна не говорити.

Коли підряд робиться кілька додавань та віднімань, то останню (непевну) цифру не слід в проміжних викладках заокруглювати, а її потрібно залишити як «буферну», і тільки по закінченні обчислень — пускати в заокруглення; це треба показати учням на практичних прикладах.

Закріплення звичок наближеного додавання і віднімання слід провадити на розв’язанні конкретних практичних задач з фізики, геометрії, техніки, суспільних наук тощо.

[5]Треба пильно виховувати почуття наближеного числа; учень повинен в умі грубо заокруглено прикинути відповідь задачі, щоб остерегтися грубої помилки в обчисленнях.[6] Будемо цю увагу називати *«головним правилом наближених обчислень»*.

В доборі задач треба дбати про те, щоб не обмежуватися задачами з круглo підібраними відповідями. Треба покінчити з закоренілою звичкою — відповідь підганяти під кругле точне число. Не раз трапляється, що коли відповідь — «не гарна», то учні (а буває й учителі) думають, що задача або розв’язана невірно, або дана невірно. Ми маємо численні приклади з вишівської практики, де студенти в таких випадках казали, що задача неправильно складена, і вважали, що її розв'язати не можна.

V. НАБЛИЖЕНЕ СКОРОЧЕНЕ МНОЖЕННЯ ТА НАБЛИЖЕНЕ СКОРОЧЕНЕ ДІЛЕННЯ

До наближеного множення та ділення слід братися тільки тоді, коли учні досконало освоїли десятковий дріб. Тут, як і при додаванні та відніманні, не слід піднімати питання про оцінку похибки. Наближене множення повинно бути в той же час скороченим множенням. Поданий нижче зразок скороченого множення зроблений за так званою схемою Утреда. Обидва числа взято з певними тисячними (з чотирма певними цифрами).

1-й приклад:

$$\begin{array}{r} 2,753\ldots \\ \times\ 3,322\ldots \\ \hline 8259\ldots \\ 825\ldots \\ 54\ldots \\ 4\ldots \\ \hline 9,142\ldots \end{array}$$

Натурально рекомендувати множення починати з найстаршого розряду множника, бо основна частина добутку тут є результат множення $2,753$ на 3 цілих. Отже, множимо $2,753$ на 3 цілих й одержуємо $8,259$ *тисячних*. Помноживши на другу цифру множника, а саме на 3 *десятих*, одержуємо $2753 \times 3 = 8259$ *десятитисячних*.

Остання цифра добутку буде 9 десятитисячних, отже цифру 9 другого часткового добутку доведеться підписати не під тисячними, а під *десятитисячними*, яких у першому частковому добутку немає; ми її не пишемо (не відомо бо, до чого цю цифру 9 додавати).

Можна сказати й так: цифру 9 відкидаємо, додержуючи принципу наближеного скороченого додавання.

Отже, натурально, на другу цифру множника помножити не $2,753$, а $2,75$ або 275 сотих. Так бачимо, що при утворенні другого часткового добутку можна і слід вперед відкинути останню цифру множеного.

Далі треба множити 2753 тисячних на 2 сотих. В цьому частковому добутку з'явилися б десяту тисячні та стотисячні, яких однакову не доведеться використовувати при додаванні часткових добутків, а тому досить помножити 27 десятих на ті самі 2 сотих, тобто при утворенні третього часткового добутку слід вперед відкинути ще одну цифру множеного. Нарешті, при множенні на останню цифру множника 2, досить помножити 2 цілих на 2 тисячних.

Тут у всіх часткових добутках останні розряди будуть одноіменні (а саме: тисячні). Тепер загальний добуток дістанемо наближено за принципом скороченого додавання. В одержаному результат можуть щонайбільше останні дві цифри бути непевними. Отже, схема скороченого множення має такі вигляд:

2-й приклад:

$$\begin{array}{rcr}
 & \times & \begin{array}{r}35,76\ldots\\ 4,568\ldots\end{array}\\
\hline
(3576\times 4=) & & 14304\ldots\\
(357\times 5=) & + & 1785\ldots\\
(35\times 6=) & & 210\ldots\\
(3\times 8=) & & 24\ldots\\
\hline
 & & 163,23\ldots
\end{array}$$

1) Перший частковий добуток $14304\ldots$ є результат множення перших чотирьох цифр множеного на 4 цілих.

2) Другий частковий добуток $1785\ldots$ є результат множення перших трьох цифр множеного на 5 десятих.

3) Третій частковий добуток $210\ldots$ є результат множення лише перших двох цифр множеного на 6 сотих.

4) У четвертому частковому добутку пишемо лише добуток із першої цифри множеного на 8 тисячних.

Всі часткові добутки мають останнім розрядом соті долі, а тому і їх сума має останній розряд теж соті; після заокруглення матимемо в результаті три певні цифри, а саме: 163.

Це правило практично надзвичайно корисне тим, що воно чітко використовує ідею системного запису чисел і тим самим може допомогти краще усвідомити процес письмового множення багатоцифрових чисел.

Зробімо в кінці ще таку увагу: з учнями наближене множення треба почати з множення наближеного числа на точне одноцифрове. Нехай маємо помножити наближене число $2,763\ldots$ на 9 (число 9 в даному разі дає найгірший випадок щодо похибки результату, бо чим більше число, на яке ми помножаємо, тим більша похибка результату). Задача зводиться до скороченого додавання дев'яти однакових наближених чисел, які кінчаються тисячними, а тому в добуткові щонайбільше дві останні цифри будуть непевні.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 2,763... \\ 9 \end{array} \\ \hline 24,867... \end{array}$$

(Не вадить показати також і на прикладі множення, що більше, як дві цифри в такому добуткові непевними бути не можуть. Справді, коли б четверта цифра після коми в числі $2,763...$ була навіть 9, то й тоді добуток

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 2,7639... \\ 9 \end{array} \\ \hline 24,8751 \end{array}$$

не відрізнявся б від одержаного $24,867$ в десятках, одиницях і десятих; різниця була б тільки в сотих і тисячних.)

В зв'язку з наближеним множенням ми ще раз нагадаємо про «головне правило наближених обчислень» — *прикидати результат кругло в умі*. Це дає нам змогу виконувати скорочене множення автоматично, не дбати про назви розрядів і в кінці свідомо знаходити місце десяткової коми в остаточному результаті. Щоб знати, де поставити кому в одержаному результаті 24867 останнього прикладу досить приблизно в умі прикинути величину добутку. В даному прикладі добуток є приблизно $3 \times 9 \approx 30$; це значить, в добуткові повинні бути десятки (2) та одиниці (4). Треба застерегти учнів від механічного застосування відомого з арифметики правила множення десяткових дробів щодо місця коми в добуткові, тому що тут необдумане застосування цього правила може стати причиною грубих помилок.

Цей самий припис щодо визначення місця коми в добуткові добре давати учням ще раніш, в зв'язку з точним множенням десяткових дробів. Цей момент має не мале значення у вихованні у учнів почуття величини числа.

Схема наближеного скороченого ділення цілком аналогічна схемі скороченого множення. Візьмімо приклад: поділити $3,322...$ на $27,53...$ Насамперед слід привчити учнів «не псувати числа», тобто робити ділення, не переставляючи в компонентах коми та не дописуючи нулів. Будемо, не зважаючи на кому, ділити 3322 на 2753:

$$
\begin{array}{r|l}
3322\ldots & 2753 \\ \cline{2-2}
:\ 2753 & 1209 \\ \cline{1-1}
569 & \qquad\qquad (569 \text{ ділимо на } 575) \\
550 & \quad (19 \text{ ділимо на } 27; \text{ не ділиться,} \\ \cline{1-1}
19 & \qquad\qquad \text{ставимо в частку } 0) \\
 & \qquad\qquad (\text{ділимо } 19 \text{ на } 2).
\end{array}
$$

До остачі 569 *нуля не дописуємо*, тому що не знаємо, яка буде наступна (п'ята) цифра числа 3322... (можливо, що якраз 9, а не 0). Замість того, щоб дописувати нуль до першої остачі 569, досягнемо приблизно того ж ефекту, коли відкинемо в дільнику 2753 останню цифру 3, тобто зменшимо дільник приблизно в 10 разів. Отже, другу цифру частки здобудемо, поділивши 569 на 275. З одержаною остачею (19) оперуємо так само: не приписуємо нуль, а знов дільник зменшуємо приблизно в 10 раз, тобто заміняємо 275 та 27. В другій остачі 19 число 27 не міститься ні разу; тому третя цифра частки є 0. Дільник зменшуємо знову приблизно вдесятеро, тобто заміняємо 27 на 2 й одержуємо четверту цифру частки, а саме 9.

Тут, як при множенні, постає питання, де поставити десяткову кому в результаті. Здоровий сенс говорить нам, що коли ділити 3 на 27, то цілих в частці не буде, 3 поділене на 27 приблизно є $0,1$, а тому, після заокруглення, частка від ділення $3,322$ на $27,53$ буде приблизно $0,121$.

Детально з'ясувавши схему скороченого ділення, можна на початку ще не затрудняти учнів докладним поясненням, чому саме і тут що найбільше дві останні цифри результату непевні та пускаються в заокруглення.

Наведімо ще один приклад ділення:

$$
\begin{array}{r|l}
23987\ldots & 0,03294\ldots \\ \cline{2-2}
:\ 23058 & 728500\ldots \\ \cline{1-1}
929 & \\
658 & \\ \cline{1-1}
271 & \\
256 & \\ \cline{1-1}
15 &
\end{array}
$$

Ділимо 23987 на 3294, одержуємо в частці 7285; щоб знати, де поставити кому в частці, ми в умі приблизно прикидаємо: 23 тисячі поділити на 3 сотих буде приблизно 700 тисяч, а тому до одержаного результату 7285 дописуємо ще два нулі і дістаємо, заокругливши частку 728000 з трьома певними цифрами.

Схеми скороченого множення і скороченого ділення настільки ідейно поєднані та подібні, що великих труднощів під час засвоєння наближеного ділення сподіватися не можна; при належному керуванні можна добитися, щоб дехто з учнів сам «відкрив» цю схему.

У вищенаведених прикладах множення і ділення наближених чисел (крім останнього) обидва компоненти мають однакову кількість цифр; коли цього нема, то слід такої рівності досягти через заокруглення одного з компонентів. Наприклад, коли множити за схемою Утреда $2,753$ на $3,32271$, одержимо практично такий самі результат, як при множенні $2,75$ на $3,322$ (тому що на цифри 7 і 1 множника $3,32271$ не буде вже чого множити). Коли в одному компоненті чотири певні цифри в другому шість, то беремо їх увагу в обох компонентах тільки по 4 цифри; все одно дві останні цифри другого компонента не використовуються і не поліпшують результату.

При скороченому множенні і діленні варто використовувати теж певне *правило доповнення*, що дає практично змогу в результаті пускати в заокруглення не дві останні цифри, а *тільки одну*.

Приклад 2-й на стор. 30 при використанні цього правила робимо так:

$$\begin{array}{rr}
\times\ 35,76\ldots & \\
4,568\ldots & \\
\hline
14304 & (\text{було } 14304) \\
1788 & (\text{було } 1785) \\
214 & (\text{було } 210) \\
28 & (\text{було } 24) \\
\hline
163,34 \approx 163,3\ldots &
\end{array}$$

Другий частковий добуток змінився з 1785 на 1788, тому що при множенні 357 на 5 ми урахували добуток 5 сотих на 6 сотих, рівний 3 тисячним, що ми їх і додали до 1785 тисячних. Так само зроблено з рештою часткових добутків. Завдяки цьому поліпшенню в часткових добутках, у загальному добутку $163,34$ можна пускати в заокруглення тільки одну останню цифру (4); дістаємо $163,3$ замість раніш одержаного 163.

Коли ми маємо виконати декілька скорочених множень та ділень з наближеними числами, то в проміжних діях не слід робити заокруглень; непевні цифри залишаємо до кінця, як «буферні», і заокруглюємо лише остаточний результат.

VI. НАБЛИЖЕНЕ КОРЕНЮВАННЯ

Операція добування коренів, як проблема, постає тоді, коли не можна добути точний корінь, або коли корінь треба здобути з великого числа, якого немає в таблицях квадратів. Іноді просто немає рації добувати точно корінь з великого числа, досить його добути наближено.

Вивчення дії коренювання слід починати з будування графіка квадратної функції

$$y = x^2.$$

По цьому графіку привчаємо учнів знаходити наближені значення коренів чисел, наприклад:

$$\sqrt{3} \approx 1,7.$$

Зі збільшенням масштаба графіка, збільшується точність здобутого результату. Так, наприклад, коли взяти за одиницю 5 см, то легко здобути:

$$\sqrt{3} \approx 1,73.$$

При цих вправах правильність і коренювання перевіряємо скороченим множенням:

$$1,73^2 \approx 2,99 \approx 3,0.$$

Коли учень здобув інтерес до обчислень і почуття величини числа, то у нього натурально виникає питання, як уточнити результат, здобутий графічно. Для цього можна використати таблицю квадратів та лінійну (графічну або аналітичну) інтерполяцію.

В процесі всіх цих вправ, нарешті, виникне внутрішня потреба навчитися уточняти цей результат до довільної бажаної міри, тобто настає час для подачі алгорифма добування кореня. Цей алгорифм слід [7]подавати саме, як спосіб наближеного добування кореня, що тільки іноді дає курйозні винятки, уриваючись на скінченому числі кроків (корінь з точного квадрата). Давати окремо і наперед цей алгорифм для точного числа — непотрібна задача.[8]

При здобуванні неточних коренів з великих чисел можна комбіновано використовувати і таблицю квадратів і алгорифм.

Подаємо далі схему наближеного скороченого добування квадратного кореня. Тут та ж ідея, що ми її проводили в скороченому множенні і діленні за правилом Утреда.

1-й приклад:

$$\sqrt{2,75 \mid 3... \mid} \approx 1,659 \approx 1,7...$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
26 & 175 \\
6 & 156 \\ \hline
325 & \;193. \\
5 & \;160. \\ \hline
3\cancel{3}\cancel{0}. & \quad 33... \\
9 & \quad 27... \\ \hline
 & \qquad 6...
\end{array}$$

Друга цифра кореня є 6. Число 193 ділимо на $2 \times 16 = 32$ і одержуємо 5 (до 193 нуля не дописуємо, тому що не відомо, яка цифра в числі 2753 після 3-х); перемноживши 32 на 5, одержуємо 160. Від 193. віднімаємо 160., різниця буде 33.; щоб знайти дальшу цифру кореня, до остачі 33. не дописуємо нулів, а ставимо натомість ще дві крапки; ділимо 33... на 3, частка буде 9; 3...множимо на 9, дістаємо 27... і до кореня допишемо ще четверту цифру 9.

Дальших цифр кореня не шукаємо, бо всі цифри підкореного числа вичерпані. Сам процес коренювання показує, коли треба спинитися. При такому добуванні кореня, щонайбільше дві останні цифри можуть бути непевні.

2-й приклад:

$$\sqrt{3,1416} \approx 1,7726 \approx 1,773...$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
27 & 214 \\
7 & 189 \\ \hline
347 & 2516 \\
7 & 2429 \\ \hline
35\cancel{4}. & \quad 87.. \\
2 & \quad 70.. \\ \hline
3.... & \quad 17... \\
6 & \quad 18...
\end{array}$$

До третьої остачі 87 треба було б дописати два нулі і поділити 870 на 354; замість цього ми дільник заокруглюємо до 350 і ділимо 87 на 35. Четверту цифру кореня дістаємо 2. З новою остачею робимо так само, не дописуємо фіктивних нулів, а замість них ставимо відповідне число крапок.

Подаємо ще один приклад скороченого коренювання, використовуючи тут певне **правило доповнення**:

$$\sqrt{3,1416} \approx \ldots 1,775$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
27 & 214 \\
7 & 189 \\
\hline
347 & 2516 \\
7 & 2429 \\
\hline
35. & \quad 87.. \\
2 & \quad 71 \\
\hline
\ldots & \quad 16.... \\
5 & \quad 18
\end{array}$$

До остачі 87 не дописуємо два нулі; замість цього закреслюємо в числі 354 цифру (4), і ділимо на 35. Використовуючи правило доповнення, множимо 35 на 2, одержуємо 71. Від 87 віднімаємо $71..$, остача буде $16..$ До числа $16..$ дописуємо ще дві крапки, одержуємо число $16....$ (з чотирма крапками). Замість того, щоб ділити число 16 на число 35, ми за принципом скороченого ділення закреслюємо в дільнику ще одну цифру (тобто 5) і ділимо 16 на 3, буде 5; перемноживши 5 на 35, одержуємо (використовуючи правила доповнення) число 18. Отже остання цифра кореня буде 5.

Коли провести скорочене коренювання з використанням правила доповнення, то в результаті досить пустити в заокруглення тільки одну останню цифру.

VII. АБСОЛЮТНА ТА ВІДНОСНА ПОХИБКА

Про похибку, як про величину, що має самостійний інтерес, слід говорити тільки після того, коли вищеподана техніка перших чотирьох наближених дій буде засвоєна цілком. *Абсолютна похибка* є абсолютна вартість різниці між числом та його наближенням; різниця між наближеним числом і точним додатна, то число є з недостачею; коли — від'ємна з перевишкою. Наприклад, $8,762$ є наближено (з трьома певними ними цифрами) $8,77$ з перевишкою і 8,76 — з недостачею. Тут треба вернутися до правила доповнення як до принципу меншої похибки: з двох десяткових наближень, які мають однакове число певних цифр, слід вибирати то, що має меншу абсолютну похибку;

Наприклад, для числа $2,1315$ наближення $2,132$ краще, ніж наближення $2,131$, тому, що перше з них має похибку $0,00043$, а друге число має похибку $0,00057$.

Коли число $2,853$ хочемо заокруглити до двох певних цифр, вийде $2,8$ або $2,9$. Тут знов треба взяти $2,9$, тому що похибка менша за $0,05$, коли ж взяти $2,8$ похибка буде більша за $0,05$.

Абсолютну похибку треба пов'язати з підрахунком кількості певних цифр у числі *після десяткової коми*. Наприклад, коли наближене число має дві певні цифри після коми, то абсолютна похибка числа не перевищує $0,01$; коли три певні цифри, то абсолютна похибка не перевищує $0,001$.

Ввівши поняття абсолютної похибки, можна переглянути наближене додавання і віднімання, щоб оцінити абсолютну похибку результату через абсолютні похибки компонентів.

Абсолютна похибка в 0,1 гр має менше значення для ваги 3 гр, як для ваги 300 гр. В першому прикладі відносна похибка становить

$$\frac{0,1}{3} < 0,04,$$

а в другому прикладі

$$\frac{0,1}{300} < 0,0004$$

Відносну похибку конче треба зв'язати з підрахунком кількості *усіх* певних цифр у числі. Наприклад, візьмімо наближене число $3,4$, де обидві цифри певні; тут абсолютна похибка менша за $0,1$; відносна похибка в процентах є:

$$\frac{0,1 \cdot 100}{3,4} < 3$$

Тут відносна похибка не перевищує 3%.

Коли взяти наближене число 99 з певними цифрами, то тут відносна похибка може бути близька до 1%. Найгірший випадок, тобто найбільша відносна похибка буде тоді, коли двоцифрове число близьке до 10, наприклад, число 11 з абсолютною похибкою меншою за 1; відносна похибка тут доходить до 10%.

Коли в заокругленні числа маємо дві певні цифри, то відносна похибка лежить у межах від 1% до 10%, коли три певні цифри — то в межах від $0,1\%$ до 1%; коли чотири певні цифри то від $0,01\%$, до $0,1\%$.

Цей розрахунок дає відчути, яке значення має більша або менша кількість певних цифр у числі. (Три певні цифри краще ніж дві: коли маємо три певних цифри, то відносна похибка не більша за 1%, а дві певних цифри можуть дати похибку до 10%).

Кількість певних цифр після коми визначає приблизно величину абсолютної похибки, а кількість усіх певних цифр — величину відносної похибки. Десяткове заокруглення $3,4$ має одну певну цифру після коми, а всіх певних цифр дві; можемо сказати, що його абсолютна точність є одна цифра після коми, а відносна точність — дві цифри.

При скороченому множенні та діленні, підраховуючи кількість певних цифр добутку або частки, ми якраз оцінюємо відносну точність результату.

Поданий матеріал вважається за можливе викладати на протязі 4–8 класів середньої школи, як перший розділ наближених обчислень. Другий розділ наближених обчислень, зв'язаний з логарифмами та тригонометричними таблицями, належить до 9-го та 10-го класів. Він у сучасній школі проробляється багато ретельніше, ніж перший. Так утворюється парадоксальне становище, що наближені обчислення проробляються в середній школі без своєї азбуки. Звідси — загально відомі хиби в знаннях наших учнів щодо практики обчислень, теорії логарифмів та багатьох інших теоретичних питань математики.

ТЕОРІЯ ПОДІБНОСТІ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ*

У цій статті ми подаємо схему викладу теорії подібності, значно відмінну від прийнятої в нашій підручниковій літературі.

Основні риси цієї схеми:

1. Подібне положення, як вихідний пункт теорії.
2. Використання координатної площини.
3. Використання графіка лінійної функції.
4. Більша приступність і модернізація трактування випадку ірраціонального масштабу.
5. Загальність і наочність викладу.
6. Легке поширення на 3-вимірний простір.

§ 1. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Учні повинні бути ознайомлені з координатною сіткою, знати, що всякій точці на площині відповідає одна певна пара координат, а всякій парі координат — одна певна точка. Треба звернути увагу на те, що, на підставі відомих теорем: 1) усяка пряма AB на координатній площині (на міліметрівці), не паралельна координатним осям, ділиться кожною системою паралельних рівновіддалених, прямих координатної сітки, на рівні частини (рис. 1 і 2); 2) що на паралельній до неї прямій AB ці частини (відповідно a і b) будуть такі самі. На цьому базується, наприклад, поділ даного відрізка на дане число рівних частин через відповідне накладання на міліметрівку (рис. 3).

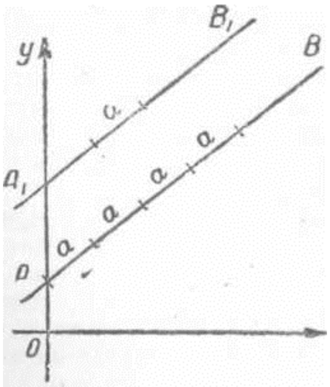


Рис. 1

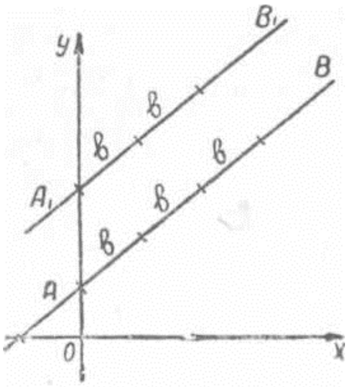


Рис. 2

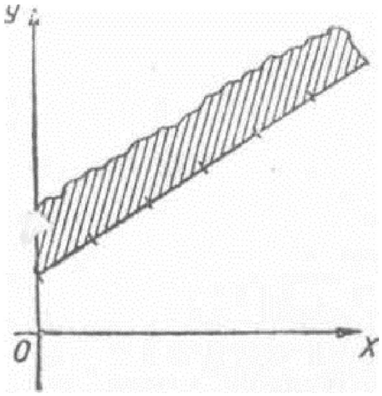


Рис. 3

---

* (В порядку пропозиції. ***Ред.***) Комуністична освіта. — 1937. — № 5–6. — С. 76–80.

Виноски зроблено для цитування у статті «Про методичну спадщину М. П. Кравчука».

Далі вважається відомим, що графік лінійного рівняння

$$Ax + By = C \tag{1}$$

є пряма і що всяка пряма на координатній площині XY є графік певного рівняння типу (1).

Вважаємо, що довід цього твердження провадиться цілком приступно й обгрунтовано, незалежно від теорії подібності. Основна частина цього доводу має показати, що

1) *графік прямої пропорціональності*

$$y = ax \tag{2}$$

є пряма, проведена через початок координат, і що

2) *рівняння всякої прямої, проведеної через початок координат, має форму* (2).

[1]Довід першої частини теореми провадиться так (рис. 4).

Нехай A, B, C є три послідовні точки нашого графіка на координатній сітці. Тоді прямокутні трикутники AB_1B і BCC_1 рівні, бо в них відповідно рівні катети. Отже, ясно, що $\angle ABC = 180°$, тобто точки A, B і C лежать на одній прямій.

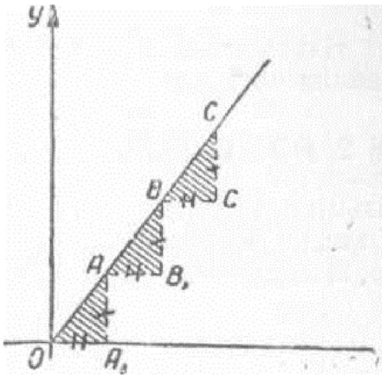


Рис. 4

Коли б ми тепер координатну сітку згустили, наприклад, вдесятеро і взяли замість сантиметрової сітки міліметрову, то на інтервалі AB знайшлося б ще 9 точок нашого графіка, про які можемо довести так само, що всі вони лежать на одній прямій, а саме на ABC.

Отже, коли взагалі взяти за x будьякий скінчений десятковий дріб, то відповідна точка (x, y) графіка рівняння (2) лежатиме на прямій AB. А через те, що всяку вартість змінного x можна з довільно малою похибкою подати скінченим десятковим дробом, то можна сказати, що з довільно малою похибкою, тобто цілком точно всяка точка графіка функції (2) лежить на прямій AB.

Довід другої половини цієї теореми можна провести так (рис. 5): пряма OM дається рівнянням (2), якщо в ньому взяти $a = \dfrac{y_0}{x_0}$, де $A(x_0, y_0)$ будьяка точка цієї прямої.

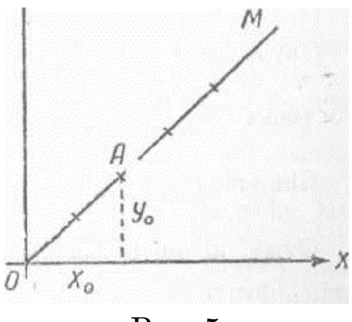


Рис. 5

Справді відразу видно, що графік функції (2) проходить через точки $(0,0)$ та (x_0, y_0), а оскільки він прямолінійний, то він цілком зливається з прямою OM.[2]

Далі треба знати, що дві прямі

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By = C \\ A_1x + B_1y = C_1 \end{array}\right\} \tag{3}$$

тоді і тільки тоді паралельні, коли система (3) суперечна, пояснення чого не являє ніяких труднощів.

§ 2. ПОДІБНЕ ПОЛОЖЕННЯ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

Візьмімо будьяку фігуру ABC на координатній площині OXY і замнімо кожну точку $M(x, y)$ точкою $M_1(kx, ky)$, де k є будьяке дійсне число, відмінне від одиниці. Постане нова фігура $A_1B_1C_1$...Фігури $A_1B_1C_1$... і ABC... будемо називати подібно положеними щодо початку координат O або інакше: фігура $A_1B_1C_1$... подібно перетворена з ABC... щодо початку координат за масштабом k.

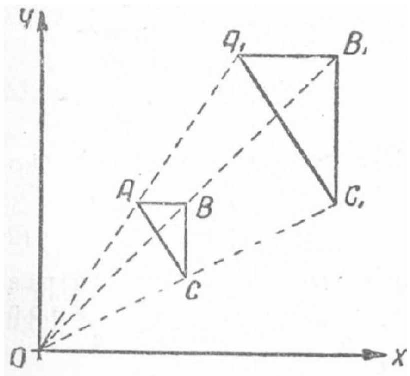


Рис. 6

Теорема I. При подібному перетворенні щодо початку координат пряма, проведена через початок координат, переходить сама в себе.

Справді, коли точка (x, y) справджує рівність

$$y = ax,$$

то її справджує й усяка точка (kx, ky).

Теорема II. При подібному перетворенні щодо початку координат пряма, на якій не лежить початок координат, переходить у пряму паралельну.

Справді, коли точка (x, y) справджує рівність

$$Ax + By = C \tag{4}$$

то точка (kx, ky) справджує рівність

$$Ax + By = kC \tag{5}$$

Спільно розв'язуючи рівняння (4) та (5), дістаємо суперечність:

$$C = kC.$$

Отже, ці дві прямі паралельні. Виняток становить випадок:

$$C = 0,$$

що повертає нас в умови теореми I.

Точки (x, y) та (kx, ky) фігур ABC і $A_1B_1C_1$ зватимемо відповідними.

Висновки з теорем I і II та з поняття подібного перетворення

I. Дві відповідні точки двох фігур, подібно положених щодо початку координат, лежать на одній прямій, яка проходить через початок координат.

II. Відповідні прямі таких фігур паралельні.

III. Відповідні Кути — рівні.

IV. [3]Відношення відповідних довжин дорівнює масштабові перетворення; зокрема відношення віддалей двох відповідних точок від початку координат дорівнює масштабові перетворення.[4]

Не спиняємося на доводах перших трьох висновків — всі вони надто прості.

Для доводу висновку IV [5]припустимо, що кінці відрізка AC є (x, y) і (x_1, y_1); тоді кінці відрізка A_1C_1 будуть відповідні (kx, ky) і (kx_1, ky_1).

Отже, проекції відрізків AC і A_1C_1 на координатні осі є відповідно —

$$\begin{array}{ll} x_1 - x, & y_1 - y \\ k(x_1 - x), & k(y_1 - y). \end{array}$$

З цього бачимо, що відношення проекцій на координатні осі відрізків A_1C_1 та AC дорівнює k.

Коли припустити, що кожна проекція складається з цілого числа сантиметрових (або міліметрових) відрізків осі, то цим твердження буде доведено, бо тоді кожен з відрізків AC та A_1C_1 буде відповідно складатися з такого самого числа рівних відрізків.

У загальному випадку, необмежено згущуючи координатну сітку, ми прийдемо до цього висновку з *довільно малою похибкою*, тобто знов таки він буде цілком точний.[6]

Звернімо увагу на те, що тут, наприклад, не робиться для фігури $ABC...$ ніякого обмеження; вона, скажімо, може бути й криволінійна. Зокрема ясно, що коли центр кола — у початку координат, то подібним перетворенням воно знов переводиться в коло; що подібне перетворення правильного многокутника знову дає правильний многокутник тощо.

Коли масштаб перетворення $k > 0$, то кажуть, що подібне положення фігур ABC... і $A_1B_1C_1$... пряме; коли $k < 0$, то обернене (рис. 7, де $k = \frac{1}{2}$).

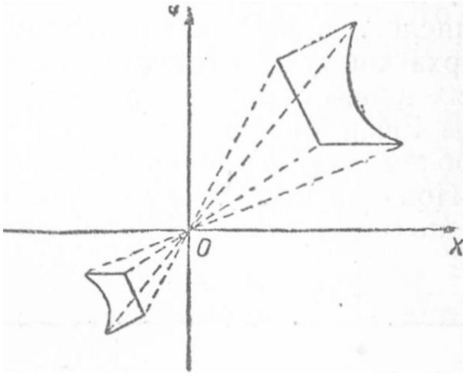


Рис. 7

Очевидно, можна означити подібне положення й так: *дві фігури на координатній сітці звуться подібно положеними щодо початку координат, коли одна зливається з другою через належну зміну масштабу сітки.*

Корисно було б (але не обов'язково) звільнити ідею подібного положення від риштовання координатних осей і координатної сітки, що робиться легко з допомогою висновків I і IV цього параграфу. На цьому тут не спиняємося.

Вважаємо за потрібне, підкреслити важливість використання ідеї подібного положення за допомогою приладів (мензула, пантограф), при доведеннях теорем (наприклад, теорема про бісектрису кута трикутника), при розв'язанні задач.

§ 3. ПОДІБНІСТЬ ПЛОСКИХ ФІГУР

Загальну частину теми викладено в попередніх двох параграфах. Лишається дати застосування та висновки, корисні для розв'язання різних дальших задач. Для цього вводимо поняття подібності.

Означення. Дві фігури звемо *подібними*, якщо одна з них через подібне перетворення стає рівна з другою.

Отже, наприклад, *два трикутники з попарно рівним кутами — подібні.* Справді, через подібне перетворення одну пару сторін цих трикутників і можна зробити однаковою, а тоді вони стануть рівні.

Ясно, що всі так звані «ознаки подібності» трикутників і безліч інших аналогічних теорем про многокутники учні доведуть тепер самі без усяких труднощів.

[7]Уявлення про подібність та про її зв'язок з рівністю тут викристалізовується чітко, не зачеплюючись раз-у-раз за колючі дроти відношень і пропорцій.

Прикрий випадок ірраціонального відношення довжин тут ніяк не заважатиме, бо в поданій схемі з ним покінчено ще в параграфах 1 і 2, де вся трудність проблеми ірраціонального в цій темі скупчена в доводі теореми про прямолінійність графіка функції

$$y = ax$$

та оберненої до неї, а також у висновку IV параграфу 2.

І там і там ірраціональність слід трактувати в стилі наближених обчислень з десятковими дробами — із щораз більшою точністю, а не в архаїчному Евклідовому стилі теорії невимірних відношень. Перший шлях являє собою здорову пропедевтику теорії границь; другий є данина Евклідовській традиції і утворює розрив у свідомості учня між проблемами ірраціонального в геометрії і в арифметиці[8].

Поданий короткий начерк є тільки схемою і не має на меті дати всі потрібні тут методичні розробки та можливі корисні варіанти.

ЗАДАЧІ КИЇВСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ 1935 Р.*

IX, X класи

1. Обчисліть значення виразу

$$\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$$

для $a = -\frac{1}{2}$, $b = -0,19$, $c = 0,18$, $d = 0,04$.

2. Розв'яжіть рівняння

$$4^{x^2 - \sqrt{x^2 - 9} - 20,75} = \sqrt{2}.$$

3. Висота правильної трикутної призми дорівнює H. Пряма, що з'єднує центр верхньої основи з серединою сторони нижньої основи, нахилена до площини нижньої основи під кутом α. Знайти площу повної поверхні призми.

4. Висота правильної зрізаної піраміди дорівнює h, бокове ребро — b. Знайдіть довжину апофеми піраміди.

5. Розв'язати систему рівнянь

$$x + y = 4,$$
$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280$$

6. Додатні числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ утворюють арифметичну прогресію. Довести, що

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

7. Нехай a, b — катети прямокутного трикутника, а c — гіпотенуза. Довести, що

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a.$$

---

* Сборник задач киевских математических олимпиад. В. А. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. — К.: Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1984. — 240 с.

М. Кравчук був головою журі цієї олімпіади, а на відкритті олімпіади виступив перед учнями і вчителями київських шкіл з доповіддю «Про завдання і методи математичних наук».

8. Знайти сторони і кути трикутника, знаючи радіус описаного кола $R,$ радіус уписаного кола r і висоту $h,$ яку проведено до однієї із сторін.

9. Для яких a, b, c многочлен $x^4 + ax^2 + bx + c$ ділиться без остачі на $(x-1)^3$?

10. Два кола перетинаються в точках A та $D.$ Через точку A проведено пряму, яка перетинає ці кола в точках P та $Q.$ Знайдіть геометричне місце середин відрізків $PQ,$ якщо пряма обертається навколо точки $A.$

11. Знайти сторони прямокутного трикутника, знаючи, що сума його катетів більша за гіпотенузу на 8 см, а висота, що опущена на гіпотенузу, дорівнює $9,6$ см.

12. Доведіть, що для будь-якого цілого n число $n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n$ ділиться на $120.$

13. Якщо кути A, B, C трикутника ABC справджують рівність

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

то трикутник прямокутний. Доведіть це.

Розв'язання деяких задач

6. Нехай $d = u_k - u_{k-1}$ — різниця прогресії. Тоді

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}}$$
$$= \frac{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_1}}{d} = \frac{u_n - u_1}{d(\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n})} = \frac{d(n-1)}{d(\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

9. Розділивши многочлен $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ на $x - 1$, дістанемо

$$P_1(x) = x^3 + x^2 + (a+1)x + a + b + 1$$

і остачу від ділення, що дорівнює $a + b + c + 1$. З умови задачі

$$a + b + c + 1 = 0.$$

Ділення $P_1(x)$ на $x - 1$ дає

$$P_2(x) = x^2 + 2x + (a + 3),$$

остача від ділення дорівнює $2a + b + 4$. Ця остача має дорівнювати нулеві, оскільки $P_1(x)$ ділиться на $x - 1$ без остачі. Розділимо $P_2(x)$ на $x - 1$. Остача від ділення дорівнює $a + 6 = 0$. Отже,

$$a = -6, b = 8, c = -3.$$

10. Нехай PQ — довільна січна, що проходить через точку A, M — середина відрізку PQ, B та C — кінці діаметрів AB та AC, K — середина відрізка BC. Тоді $BP \perp PQ \perp, CQ \perp PQ$ і, отже, $BP \parallel CQ \parallel KM, KM \perp PQ$. Отже, з точки M фіксований відрізок видно під прямим кутом. Шукане геометричне місце — коло, яке побудоване на AK як на діаметрі.

12. Подаючи цей вираз у вигляді $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, зауважмо, що з п'яти послідовних натуральних чисел одно обов'язково ділиться на 5, хоча б одно — на 3 і принаймні 2 парні. При цьому одно з послідовних чисел ділиться на 4. Отже, розглядуваний добуток ділиться на $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$.

13. Задану рівність можна перетворити до вигляду

$$\frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1,$$
$$\cos 2A + \cos 2B + 2\cos^2 C = 0,$$
$$2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C = 0.$$

Але

$$\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C.$$

Отже,

$$2\cos C[\cos C - \cos(A - B)] = 0,$$
$$4\cos C \sin\frac{A - B + C}{2} \sin\frac{A - B - C}{2} = 0,$$
$$4\cos A \cos B \cos A = 0.$$

Звідси випливає, що один з кутів A, B, C дорівнює 90°.

ПРО МЕТОДИЧНУ СПАДЩИНУ М. П. КРАВЧУКА*
Б. М. БІЛИЙ

Михайло Пилипович Кравчук займає почесне місце не лише серед видатних радянських українських математиків, а і серед математиків-методистів.

М. П. Кравчук† народився в 1892 р. в с. Човниці теперішньої Волинської області, недалеко від Луцька, в родині лісничого. Переїзд батьків до Луцька дав змогу вступити юнакові до місцевої гімназії. У 1910 р. М. П. Кравчук вступив на фізико-математичний факультет Київського університету, де з особливим інтересом вивчав математику, фізику та астрономію. В семінарі професора Д. О. Граве опановував вищу алгебру і вже в студентські роки виконав свою першу наукову працю.

Після закінчення університету (1914 р.) він протягом наступних трьох років спеціалізувався там же з математики, готуючись до наукової та професорської діяльності. За цей час Михайло. Пилипович склав магістерські іспити. З 1917 р. він починає викладати різні курси математики в київських середніх та вищих учбових закладах.

З 1920 р. починається професорська діяльність М. П. Кравчука в київських інститутах та університеті, У 1924 р. він став доктором наук, а у 1929 р. його обирають дійсним членом Всеукраїнської Академії наук: М. П. Кравчук був членом багатьох наукових українських та закордонних товариств.

У 1937 р. він став жертвою необґрунтованих обвинувачень і був репресований. Помер М. П. Кравчук у 1942 р. Тепер вчений повністю реабілітований, його ім’я є гордістю української науки і культури.

Михайло Пилипович Кравчук був різносторонньо обдарованим математиком. Бібліографія його праць містить близько 150 назв [14]‡.

---

* Методика викладання математики. — 1967. — Вип. 3. — С. 177–188.

† Біографічні відомості запозичені в основному з виданої за життя М. П. Кравчука брошури [11], а також [12, 13].

‡ В цій бібліографії відсутні статті М. П. Кравчука з методики викладання математики, про які йдеться далі, хоч складений покажчик за задумом , авторів мав на меті охопити всі, в тому числі і методичні, праці в галузі математики.

Визначні дослідження виконані ним з вищої алгебри, математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії функцій, теорії імовірностей і математичної статистики [15]*. Написано кілька праць з історії математики. Про багатогранність його професорської діяльності говорить хоч би той факт, що у 1934/35 навчальному році в університеті він читав такі курси: вища алгебра, теорія груп, теорія чисел, теорія імовірностей, апроксимація функцій, вів семінар з фахової літератури [18].

Поряд з проведенням наукових досліджень М. П. Кравчук приділяв значну увагу написанню різних підручників і посібників з вищої математики. Він очолював авторські колективи, які вели цю роботу за його участю та загальною редакцією [1–4].

З перших років своєї науково-педагогічної діяльності М. П. Кравчук проявляв значний інтерес до становлення радянської загальноосвітньої школи, брав участь у складанні підручної літератури, розробці української математичної термінології, складанні програм з математики.

Йому належить перший переклад на українську мову підручника геометрії А. П. Кисельова (видання 1919 р.), за його редакцією були складені підручники [6, 7] для семирічної школи. Особливо слід відзначити написаний у співавторстві з І. П. Біликом підручник [5]. М. П. Кравчук рецензував рукописи посібників для шкіл, зокрема працю [16], розраховану, на профшколу. В передмові до цієї книжки читаємо: «*Рукопис цього підручника ласкаво погодився переглянути акад. М. Кравчук та подав чимало цікавих вказівок, за що висловлюю. йому щиру подяку*».

З 1935 р. М. П. Кравчук почав співробітничати в Українському науково-дослідному інституті педагогіки. В 1936–1937 рр. він виступає на сторінках республіканського педагогічного журналу «Комуністична освіта» з рядом статей з актуальних питань методики викладання в школі. Вчений щедро ділиться своїми ідеями з учителями і аспірантами УНДІПу. Під його керівництвом аспірантом, нині відомим методистом М. Б. Гельфандом, була виконана кандидатська дисертація «Теорія і методика ірраціонального числа», яку автор захистив у 1937 р.

М. П. Кравчук в ці роки часто виступав з лекціями перед учительськими колективами. У 1936 р. (20–24 серпня) він брав участь в першій

* Стислий огляд, найосновніших математичних праць М. П. Кравчука подано в книзі [15].

нараді учителів-математиків шкіл України, де керував секцією старших класів і виступив з доповіддю на тему «Наближені обчислення» [17].

Акад. М. П. Кравчук очолив роботу по проведенню першої математичної олімпіади в м. Києві, проведеної за ініціативою математичного факультету КДУ для учнів IX–X класів у червні 1935 р. Він був головою жюрі, а на відкритті олімпіади виступив перед учнями і вчителями київських шкіл з доповіддю «Про завдання і методи математичних наук» [19].

Ознайомлення з науково-методичною спадщиною академіка М. П. Кравчука дозволяє твердити, що ним зроблено значний вклад в розвиток методико-математичних ідей на Україні. Найулюбленішою темою, з якою виступав М. П. Кравчук перед учителями, були наближені обчислення.

Акад. М. П. Кравчук чітко виразив свої думки щодо місця наближених обчислень в школі: <2, 1–2>* [8, 27].

У статті обгрунтовується необхідність систематично використовувати наближені обчислення протягом всього курсу математики. Причому мається на увазі не лише прикладне значення наближених обчислень, а, передусім, їх роль в опануванні нових теоретичних питань шкільного курсу математики. <2, 3–4> [8, 27].

До поняття наближеного числа рекомендується прийти, передусім, виходячи з конкретних прикладів вимірювання або зважування, а також через ділення цілих чисел з остачею та через перетворення звичайних дробів, у десяткові. Рекомендується поступово вводити нові поняття.

При виконанні дій з наближеними числами робиться наголос на тому, що в учнів <2, 5–6> [8, 29]. Це названо «головним правилом наближених обчислень».

Рекомендується виконувати скорочене додавання і віднімання з попереднім округленням даних до одноіменних розрядів і округленням результату дії з таким розрахунком, щоб всі цифри там були певні. Наближене множення і ділення розглядаються в той же час і як скорочене множення і ділення. Ці дії рекомендується виконувати за так званою схемою Утреда.

Наближене добування квадратного кореня рекомендується спочатку знаходити графічно; будується графік функції $y = x^2$ і за графіком

* Тут і далі позначення <2, *n*–*m*> означає цитату із статті «Наближені обчислення в середній школі» цього збірника, між виносками *n* та *m*.

знаходяться наближені значення x. Точність результату підвищується із збільшенням масштабу. Далі для уточнення здобутого графічно результату використовується таблиця квадратів та лінійна (графічна або аналітична) інтерполяція. Далі подається алгоритм добування квадратного кореня. Цей алгоритм рекомендується <2, 7–8> [8, 33].

Цікавий матеріал щодо наближених обчислень подано у книзі [5] (цей розділ написав М. П. Кравчук). Тут, зокрема, подано великий добір вправ і задач на виконання дій з наближеними числами.

Наближені обчислення розглядаються М. П. Кравчуком як база для вивчення ірраціональних чисел. Це чітко виражено у вищерозглянутій статті про наближені обчислення., Наведемо у зв'язку з цим такі міркування з цієї статті: <2, 9–10> [8, 26].

<2, 11–12> [8, 27].

Ці положення реалізовані у виконаній під керівництвом М. П. Кравчука дисертаційній праці М. Б. Гельфанда [20]. Експериментальна робота в школі проводилася М. Б. Гельфандом спільно з вчителькою (нині доцентом Київського педінституту) О. П. Сергуновою [21].

Свої методичні погляди на викладання в школі логарифмів М. П. Кравчук виклав у статті [9], опублікованій спільно з Б. Маліновою.

Автори ставлять собі за мету подати учням <1, 1–2>.* [9, 97].

За пропонованим у цій статті методом вивчається детально показникова функція «як основа і фундамент всієї надбудови теорії логарифмів» [9, 97].

Спочатку будується графік показникової функції $y = 2^x$ для цілих значень x і тут же на графіку показуєтеся, що будь-яке число N можна подати в формі 2^x, причому x ми можемо наближено знайти за графіком. Далі пояснюється учням про доцільність заміни чисел на степінь певної основи, що дасть змогу замінити дії вищого ступеня на дії нижчого ступеня.

Обгрунтовується доцільність взяти за основу число$1,1$: функція $y = 1,1^x$ дає, порівнюючи з функцією $y = 2^x$, більш ущільнену таблицю значень для y, коли x міняти, як і попереду, через одиницю. Показується також, що основа $1,1$ зручна і з тих міркувань, що її технічно, дуже легко підносити до степеня.

* Тут і далі позначення <1, *n–m*> означає цитату із статті «Новий метод викладання логарифмів в середній школі» цього збірника, між виносками *n* та *m*.

Далі автори повідомляють, що, як показала практика вивчення логарифмів за пропонованою схемою (в середніх школах № 49 і № 50 м. Києва), учні самі тут же заявляють, що краще за основу взяти $1,01$, $1,001$, $1,00001$ і т. д., <1, 3–4> [9, 98].

Ставиться вимога: учні повинні самостійно під керівництвом вчителя скласти таблицю значень функції $y = 1,1^x$ (наводиться така таблиця для цілих значень x від -9 до 50, значення функції округлені з точністю до $0,1$).

За допомогою цієї таблиці проводиться наближене множення, ділення, степенювання та коренювання чисел, записаних попередньо у формі $1,1^x$.

Властивості показникової функції рекомендується розглянути аналітично та проілюструвати на графіку для випадку $y = 1,1^x$. Після цього запроваджується поняття про логарифм як показник степеня, до якого слід піднести основу, щоб одержати дане число.

Рекомендується, щоб учні самостійно за графіком функції $y = 1,1^x$ склали табличку й для функції $x = \log_{1,1} y$ (наводиться табличка для цілих значень y від 1 до 100).

Далі приступають до розв'язування вправ, вперше використовуючи поняття логарифма: Рекомендується проводити інтерполяцію на око. Лише після засвоєння цього матеріалу, після того, як учні почали свідомо користуватися таблицями логарифмів, пропонується переходити до десяткової системи логарифмів.

Спочатку на прикладах конкретного переходу від основи $1,1$ до основ $1,1^2, 1,1^3$ і т. ін.; учні переконуються, що логарифми даного числа при різних основах пов'язані між собою певним співвідношенням і що логарифми даного числа при різних основах можна звести до логарифма даного числа при основі $1,1$, поділеного на певне число.

Така підготовча. робота для розуміння модуля переходу від одної системи логарифмів до другої сприяє тому, що учні цілком свідомо розуміють, що

$$\log_{10} N = \frac{\log_{1,1} N}{24,2} = \frac{\log_{1,1} N}{\log_{1,1} 10}.$$

Далі пропонується, щоб учні за допомогою модуля переходу від логарифмів при основі $1,1$ до логарифмів при основі 10 перевели свою табличку логарифмів при основі $1,1$ на табличку при основі 10.

Пропонується; відповідно змінивши масштаб по осі абсцис, використовувати той же самий графік функції $y = 1{,}1^x$ як графік функції $y = 10^x$.

Далі подається загальне поняття про модуль переходу від будь-якої основи a до будь-якої іншої основи b.

При такому викладі матеріалу учні підходять до десяткових логарифмів як до окремого випадку загальної ідеї логарифмів. Далі пропонується, щоб учні самостійно за графіком виготовили саморобні логарифмічні лінійки. На завершення теми рекомендується розв'язувати вправи і задачі на практичне застосування логарифмів.

Отже, у вивченні логарифмів при такій послідовності викладу матеріалу учні будуть йти шляхом, близьким до історії розвитку логарифмів.

Таким чином, в основу запропонованого викладу вчення про логарифми покладено «чітке висвітлення та органічне освоєння ідеї логарифмів — заміни чисел степенями будь-якого одного числа» [9, 104]. «Виробляється загальна ідея логарифмів, не зв'язана з певною основою» [9, 104]. <1, 5–6> [9, 104].

Викладені в цій статті ідеї були реалізовані М. П. Кравчуком ще у 1925 р. в написаному ним розділі про показникову функцію і логарифми [5, 279–306].

Експериментальну роботу з цього питання в загальноосвітній середній школі проводила вчителька Б. І. Малінова [22], а також О. П. Сергунова та ін. Цікаво навести у зв'язку з цим висловлення О. П. Сергунової: «Нас працює невеличка група — п'ять учителів — в Науково-дослідному інституті педагогіки, під керівництвом академіка Кравчука. Ми робимо дуже цікаві спроби організувати самостійну роботу учнів над таблицею логарифмів. Зрозуміло, що кожен учень мусить уміти користуватися таблицею, але цього замало. Треба допомогти йому дійти своїм розумом тих самих висновків, що їх подається звичайно у готовому вигляді,— тоді він справді органічно засвоїть їх.

Ми працюємо з учнями й бачимо, як вони, за нашою допомогою, знаходять правильні шляхи в логарифмуванні. І тоді вони краще розуміють велике відкриття Непера, вони працюють з більшою охотою, з більшим інтересом» [23, 117].

У статті [10] М. П. Кравчук пропонує схему вивчення теорії подібності, відмінну від викладених у підручниках з елементарної геометрії. Основні риси цієї схеми такі: подібне перетворення фігур розглядається як вихідний пункт теорії, використовується система прямокутних координат і графік лінійної функції.

Напочатку пропонується ознайомити учнів з координатною сіткою, для чого звернути увагу на те, що на підставі відомих теорем: 1) усяка пряма AB на координатній площині (на міліметровці), не паралельна координатним осям, ділиться кожною системою паралельних рівновіддалених прямих координатної сітки на рівні частини, 2) що на паралельній до неї прямій $A'B'$ ці частини будуть такі самі.

Для дальшого викладу потрібно знати, що графік лінійного рівняння

$$Ax + By = C \tag{1}$$

є пряма і що будь-яка пряма на координатній площині є графік певного рівняння типу (1). Основна частина цього доведення має показати, що: 1) графік прямої пропорціональності

$$y = ax \tag{2}$$

є пряма, проведена через початок координат, і що 2) рівняння кожної прямої, проведеної через початок координат, має форму (2).

Доведення цих тверджень становить важливіший момент пропонованої схеми; тому передаємо його у повному текстуальному викладі автора: <3, 1–2>* [10, 77–78].

Для дальшого викладу також треба з'ясувати учням, що дві прямі

$$\left.\begin{aligned} Ax + By &= C \\ A_1x + B_1y &= C_1 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

тоді і тільки тоді паралельні, коли система (3) — несумісна.

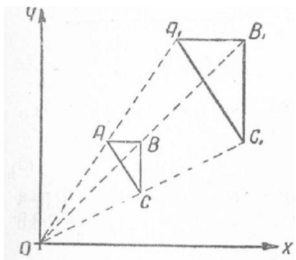


Рис. 3

Далі на координатній площині (рис. 3) розглядається фігура $ABC\ldots$ і $A_1B_1C_1\ldots$ і кожна точка $M(x, y)$ цієї фігури замінюється точкою $M_1(kx, ky)$. Тоді фігури $ABC\ldots$ і $A_1B_1C_1\ldots$ називаються . «подібно положеними щодо початку координат», або інакше: «фігура $A_1B_1C_1\ldots$ подібно перетворена з $ABC\ldots$ щодо початку координат за масштабом k» [10, 78].

Далі подається доведення двох теорем: 1) при подібному перетворенні щодо початку координат пряма, проведена через, початок коор-

* Тут і далі позначення <3, n–m> означає цитату із статті «Теорія подібності в середній школі» цього збірника, між виносками n та m.

динат, переходить сама в себе, 2) при подібному перетворенні щодо початку координат пряма, на якій не лежить початок координат, переходить у пряму паралельну.

В основі доведення лежить властивість функції $y = ax$ (перша теорема) та умова паралельності прямих (друга теорема).

Далі як висновки з теореми подаються властивості, подібного перетворення.

Наведемо, зокрема, доведення властивості IV: <3, 3–4> [10, 79].

Це твердження М. П. Кравчук доводить шляхом таких міркувань (рис. 3): <3, 5–6> [10, 79].

Далі робиться зауваження, що при цих міркуваннях не робиться для фігури $ABC...$ ніякого обмеження, що вона може бути й криволінійною.

З'ясовується питання про пряме і обернене «подібне положення» фігур.

Нарешті подається таке означення подібних фігур: «Дві фігури звемо подібними, якщо одна з них через подібне перетворення стає рівна з другою» [10, 79].

В кінці статті автор, методично обгрунтовуючи запропонований ним спосіб, пише: <3, 7–8> [10, 80].

Вищевикладене показує, що запропонований акад. М. П. Кравчуком спосіб вивчення теорії подібності в шкільному курсі математики, якщо говорити про його експериментальну перевірку, потребує грунтовної методичної розробки. Проте, наскільки нам відомо, запропонована схема не була реалізована в якомусь підручнику, не виконано в цьому плані і сугубо методичного опрацювання теми.

Ознайомлення з науково-методичною спадщиною акад. М. П. Кравчука показує, що він ретельно дбав про спадкоємність у вивченні математики в середній і вищій школі, керуючись при цьому такими загальними принципами: 1) «Треба давати належні настанови в молодому віці, щоб пізніше не переучувати студентів, не переборювати в них шкідливих звичок» [8, 27]. 2) «Треба погодитися з тим, що ті розділи математики, які на даному етапі математичного знання ми не можемо теоретично-науково обгрунтувати в середній школі, слід з'ясовувати там через конкретні обчислення та наочно-графічну подачу матеріалу» [9, 97].

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Кравчук та Д. Тополянський. Вибрані питання з основ аналізу нескінченно-малих, вид. ВУАН, К., 1933.

2. М. Кравчук та Г. Дрінфельд, Вступ до вищої математики, вид. ВУАН, К., 1932.

3. М. Кравчук, П. Касьяненко, С. Кулик, В. Можар, О. Смогоржевський, Вища математика, посібник для студентів та самоосвіти, за ред. акад. М. Кравчука, ч. І, вид. ВУАН, К., 1934.

4. М. Кравчук та Г. Дрінфельд, Елементи теорії визначників, вид. ВУАН, К., 1933.

5. М. Кравчук і І. П. Білик, Математика для сільськогосподарських профшкіл, ДВУ, 1925.

6. І. Василенко, М. Гордон, З. Яновська, Робоча книга з математики, за ред. акад. М. Кравчука (в трьох частинах — окремо для V, VI, VII років навчання — Б. Б.), ДВУ, 1929–1930 (те саме і російською мовою.— Б. Б.).

7. І. Василенко, М. Гордон, С. Дзюбенко, З. Яновська, бригадир — проф. М. Орлов, за ред. акад. М. Кравчука, Математика, підручник для семирічної політехнічної школи, V клас, ч. 1, ДВУ, 1932.

8. М. Кравчук, М. Гельфанд, О. Вулах, Наближені обчислення в середній школі, «Комуністична освіта», 1936, № 9, стор. 26–35.

9. М. Кравчук, Б. Малінова, Новий метод викладання логарифмів у середній школі, «Комуністична освіта», 1936, № 1–2, стор. 96–104.

10. М. Кравчук, Теорія подібності в середній школі, «Комуністична освіта», 1937, № 1, стор. 76–80.

11. Замітка про праці Михайла Кравчука, К., 1929.

12 . УРЕ, т. 7, стор. 321.

13. Б. Харчук, Поет німого числа, «Знання та праця», 1964, № 8, стор. 9–10.

14. Українська математична бібліографія, К., Вид-во АН УРСР, 1963, стор. 163–168.

15. Й. З. Штокало, Нарис розвитку математики на Україні за 40 років Радянської влади, Вид-во АН УРСР, 1958, стор. 13–15.

16. Ф. Калинович, Елементи наближених обчислень, ДВУ, 1930.

17. М. Афонін, Перша нарада учителів-математиків шкіл України, «Комуністична освіта», 1936, № 9, стор. 145.

18. Розвиток науки в Київському університеті за сто років, вид-во КДУ, 1935, стор. 68–69.

19. І. Флацбаум, Математична олімпіада, «Комуністична освіта», 1935, № 9, стор. 63–64.

20. М. Б. Гельфанд, Теорія і методика ірраціонального числа, «Наукові записки УНДІПу», т. II, 1940, стор. 127–178.

21. М. Гельфанд і О. Сергунова, Як дати учням на базі наближених обчислень поняття про ірраціональне число та дії над ним, «Комуністична освіта», 1938, № 1, стор, 88–96.

22. Б. І. Малінова, Про елементарні способи складання логарифмічних таблиць, «Наукові записки УНДІПу», т. II, 1940, стор. 273–282.

23.В. Данський, Ольга Петрівна Сергунова, «Комуністична освіта», 1936, № 3, стор. 114–119.

ПРО ПОГЛЯДИ М. П. КРАВЧУКА НА МЕТОДИКУ ПОЧАТКОВОГО ОЗНАЙОМЛЕННЯ УЧНІВ З ЕЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ*

Б. М. БІЛИЙ, А. П. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ

В опублікованій статті про методичну спадщину видатного українського математика і педагога М. П. Кравчука [1] розглядались погляди вченого на виклад у шкільному курсі математики так питань, як наближені обчислення, ірраціональні числа, логарифми, подібність фігур. У зв'язку з введенням у курс математики середньої школи елементів математичного аналізу значний інтерес становлять думки видатного математика-педагога про методику початкового ознайомлення учнів з поняттями і методами математичного аналізу. Про методичну концепцію вченого в цьому питанні можна говорити на підставі аналізу посібників [2] і [3], складених за планом і за безпосередньою участю та загальною редакцією М. П. Кравчука. Особливо показовим щодо цього є посібник [3], який рекомендується й для самонавчання. Можна відзначити такі характерні особливості цих посібників.

1. Широке використання наближених обчислень для з'ясування насамперед понять, пов'язаних з нескінченними процесам (поняття ірраціонального числа, границі похідної, інтеграла).

2. Оскільки поняття границі змінної складне, воно вивчається у два етапи. Спочатку розглядається поняття нескінченно малої величини, яка є найпростішим типом змінної величини, що має границю, і тому доступніша для учнів. Потім вдало дібраним прикладами учні підводяться до розуміння границі змінної величини, яка визначається через нескінченно малу.

3. На основі мінімальних відомостей з теорії границь доводиться (з використанням нескінченно малої) основна теорема про існування границі монотонної обмеженої змінної. Це доведення просте і доступне

* Методика викладання математики: —1970. — Вип. 6. — С. 178–182.

завдяки строгості викладу, а також чіткому виділенню ідеї доведення і опусканню деталей і дрібниць. Нам здається, що при деякій методичній доробці воно буде доступним для учнів

4. Означення границі функції зовсім не розглядається через його складність. Вважається, що функція є насамперед змінною величиною, а для останньої це поняття вже означено, і тому для функції його можна не означати.

5. Пропедевтика похідної і інтеграла проводиться при розгляді лінійної і квадратної функцій. Це означає, що насіння аналізу нескінченно малих треба сіяти у свідомості учнів якомога раніше і систематично протягом вивчення всього шкільного курсу математики.

6. При першому ознайомленні з умовами монотонності і екстремумів останні встановлюються за допомогою наочних графічних уявлень, а при повторному розгляді тверджень, які лежать в основі застосувань похідної, недоведене зводиться до мінімуму — до геометричного трактування теореми Лагранжа.

7. Вимірюваний геометричних величин (площ, об’ємів, поверхонь) проводиться на основі наочних, уявлень про ці величини, але кожного разу, наприклад; при обчисленні об’єму, акцентується увага на використанні такого постулату: об’єм тонкого шару, що міститься між двома паралельними перерізами, наближено дорівнює добутку площі основи (будь-якого з двох) на висоту з як завгодно малою відносною похибкою; завдяки цьому оформляється запис, з якого видно, що площа перерізу, паралельного основі,— похідна об’єму розглядуваного тіла. В цьому постулаті вже міститься принцип Кавальєрі, мабуть, тому останній ніде не використовується.

8. Площі, об’єми, поверхні обчислюються за допомогою невизначеного інтеграла, а потім усі добуті формули виводяться за допомогою визначеного інтеграла. Такий, підхід цінний тому, що задача про знаходження первісної і невизначеного інтеграла майже та сама. А коли врахувати, що площа перерізу, паралельного основі кожного з тіл (піраміди, конуса — повних і зрізаних,:кульового сегмента, кульового шару і похилої призми) є квадратною функцією віддалі цього перерізу від вершини (верхньої основи), то задача про обчислення об’ємів зазначених тіл зводиться до знаходження, первісної для квадратного тричлена. Але учням неважко догадатись, що первісною для квадрат-

ного тричлена є многочлен третього степеня з невизначеним вільним членом.

Наприклад, об'єм піраміди обчислюється так.

Нехай x — висота, S — площа основи, V — об'єм. Об'єм V — функція висоти x. Коли висоті x надати приросту Δx, то об'єм V збільшиться на ΔV (об'єм зрізаної піраміди з основами S і $S + \Delta S$).

Потім показуємо, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S, \text{ або } V' = S,$$

звідки

$$V = \int S dx$$

і зауважуємо, що в цьому випадку $S = kx^2$.

Отже,

$$V = \frac{kx^3}{3} = S \cdot \frac{x}{3}.$$

Аналогічно обчислюється об'єм кульового сегмента і пропонується у вигляді вправ обчислити об'єм кругового конуса і зрізаної піраміди. Зауважимо, що такий підхід до виведення форм об'ємів тіл рекомендується і в одній з методичних праць О. І. Маркушевича [4].

9. Велика увага приділяється зв'язку формул для обчислення площ, об'ємів, поверхонь різних геометричних фігур і тіл. Це дає можливість, по-перше, зменшити кількість викладок; по-друге, скоротити викладки; по-третє, вибрати найкоротший, доступний для учнів спосіб викладки; по-четверте, полегшити запам'ятання Наприклад, вказується, як з формули об'єму кульового сегмента дістати формулу для об'єму кулі.

10. Оскільки функції, які найчастіше зустрічаються на практиці, або монотонні, або кусково-монотонні (наприклад, показникова функція монотонна, а синус і косинус — кусково-монотонні; це легко довести, користуючись знаком похідної), то при першому ознайомленні з визначеним інтегралом виклад ведеться, для монотонної функції (який добре унаочнюється) і розглядається не сучасне означення визначеного інтеграла, а Архімедове. Таким чином, М. П. Кравчук, можна думати, вважав, що означення інтеграла як границі інтегральних сум у сучасному розумінні цього поняття не під силу середньому учне-

ві, отже, це поняття найкраще означити як приріст первісної функції на проміжку інтегрування.

11. Щоб переконати учнів, що вже знання похідної дає можливість розв'язувати важливі задачі з інших галузей, розглядаються найпростіші застосування диференціального числення до алгебри, зокрема для виділення всіх кратних коренів алгебраїчного рівняння, не розв'язуючи останнього, і для встановлення числа дійсних коренів будь-якого рівняння.

Щоб з'ясувати перше зазначене алгебраїчне застосування похідної, спочатку проводяться такі загальні міркування.

Нехай $f(x)$ — многочлен, що має a коренем кратності m. Тоді $f(x) = (x-a)^m \varphi(x)$ і, отже, $\varphi(a) \neq 0$. За правилом диференціювання добутку дістаємо:

$$f'(x) = m(x-a)^{m-1}\varphi(x) + (x-a)^m \varphi'(x) =$$
$$= (x-a)^{m-1}[m\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)].$$

Весь вираз у квадратних дужках при $x = a$ є $m\varphi(a)$ і, отже, не дорівнює нулю, а внаслідок того, що $x-a$ входить співмножником у $f'(x)$ $(m-1)$ раз, то a — корінь похідної $f'(x)$ кратності $m-1$, а $(x-a)^{m-1}$ буде найбільшим спільним дільником функції $f(x)$ та її похідної $f'(x)$.

Застосування цього твердження до розв'язування алгебраїчних рівнянь ілюструється на такому прикладі.

Розв'язати рівняння $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$.

Маємо:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3, f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x-1)^2(x+2).$$

Крім того, бачимо, що $f(1) = 0$. Отже, число 1 є трикратним коренем даного многочлена; це означає, що $f(x)$ ділиться на $(x-1)^3$. Поділивши, дістанемо: $x+3$. Отже, всі корені даного рівняння, такі: $1,\ 1,\ 1,\ -3$.

Друге зазначене алгебраїчне застосування похідної грунтується на такому твердженні:

«Між двома коренями диференційовної функції існує принаймні один корінь похідної». Це твердження є безпосереднім наслідком теореми Лагранжа.

Справді, якщо $f(x)$ — диференційовна функція $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то за теоремою Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

де $c \in (x_1, x_2)$, дістанемо, що $f'(c) = 0$ (бо $x_1 \neq x_2$), тобто c — корінь похідної $f'(x)$.

Застосування цього твердження ілюструється такими прикладами:

1) Рівняння $f(x) = 2^x - 4x = 0$ має не більше двох дійсних коренів, бо похідна $f'(x) = 2^x \ln 2 - 4$ має тільки один дійсний корінь (тут вважається очевидним, що графік показникової функції $y = 2^x$ перетинається з прямою $y = \dfrac{4}{\ln 2}$, паралельною осі Ox тільки в одній точці).

2) Показати, що функція $x^3 + 5x + a$ не може мати більше одного дійсного кореня. Ця вправа пропонується читачеві для самостійного , розв'язування.

12. Розглядом простих прикладів учні підводяться до розуміння поняття про диференціал, який означується як добуток похідної на довільний приріст аргументу. Звертається увага на те, що диференціали функції і аргументу нескінченно малі (разом з приростом аргументу), але взагалі не нулі; це пояснюється геометрично.

13. Щоб розкрити перед учнями широту ідей і методів математичного аналізу, вже при першому ознайомленні з ним, після розгляду невизначеного інтеграла, відразу розглядаються найпростіші диференціальні рівняння, причому не формально, а вдалою постановкою конкретних питань, які учні вивчали раніше з іншого погляду.

14. Щоб з'ясувати питання, які, зважаючи на підготовку читачів, не можна строго обгрунтувати, широко використовуються конкретні обчислення і наочно-графічні ілюстрації. Наприклад, дуже вдала, як нам здається, геометрична ілюстрація неперервності синуса. Суть її така.

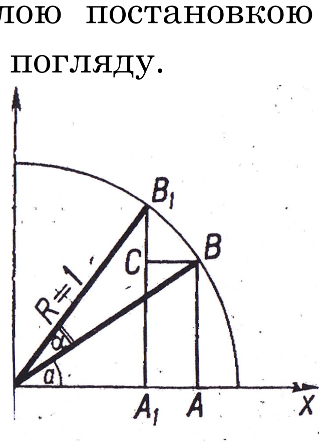


Рис. 1

З рис. 1 видно, що

$$\left|\sin(a + \alpha) - \sin a\right| = \left|A_1B_1 - AB\right| = CB_1 < BB_1 < \overset{\frown}{BB_1} = \alpha,$$

звідки

$$\lim_{\alpha \to 0} \sin(a + \alpha) = \sin a.$$

Таким чином, академік М: П. Кравчук вважає, що початковий курс аналізу повинен бути обов'язково пропедевтичним, побудованим на мінімальному функціональному матеріалі; завдання цього курсу — насамперед ознайомити учнів з ідеями і методами математичного аналізу, а не з його обгрунтуванням і викладом деталей.

На нашу думку, погляди академіка М. П. Кравчука і сьогодні становлять певний інтерес для правильного розв'язання питання методики викладання елементів математичного аналізу в загальноосвітній школі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. М. Білий, Про методичну спадщину М. П. Кравчука, республ. збірник «Методика викладання математики», вип. 3, К., «Радянська шк.», 1967.

2. М. Кравчук, Г. Дрінфельд, Вступ до вищої математики, К., ВУАН, 1932.

3. М. Кравчук, П. Кас'яненко, С. Кулик, В. Можар, О. Смогоржевський, Вища математика, ч. І, К., ВУАН, 1934.

4. А. И. Маркушевич, Вывод формул для объемов геометрических тел в X классе с использованием производной, «Математика в школе», 1965, № 6.

ПОКАЖЧИК ПРАЦЬ М. КРАВЧУКА

1914

1. О группах перестановочных матриц // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. — Сер. 2. — **14**. — С. 169–176.

1917

2. Проєкт алгебричної термінології. — К.: Вид-во Тов-ва Шкільн. Освіти. — 8 с.
3. Проєкт геометричної термінології. — К.: Вид-во Тов-ва Шкільн. Освіти. — 15 с.

1919

4. Геометрія. Курс лекцій в Українському народному університеті. — К., Літогр.

1920

5. Ґеометрія для семирічних трудових шкіл. — К., Рукопис.

1923

6. Деякі уваги про розв'язання алгебричних рівнянь, основані лише на понятті незведимості / М.М. Крилов, М.П. Кравчук // Зап. фіз.-мат. відділу УАН. — **1**, вип. 2. — С. 62–72.
7. До теорії кривих четвертого ступеня // Наук. зап. Київ. н.-д. каф. — **1**. — С. 76–84.
8. До теорії перемінних матриць // Зап. фіз.-мат. відділу УАН. — **1**, вип. 2. — С. 28–33.
9. Про одно перетворення квадратичних форм // Там само. — С. 87–90.

1924

10. Про квадратичні форми та лінійні перетворення // Тр. фіз.-мат. відділу УАН. — **1**, вип. 3. — С. 1–91.
11. Довід теореми про суцільність коренів алгебричного рівняння // Наук. зап. Київ. н.-д. каф. — **1**, вип. 2. — 71–81.
12. До загальної теорії білінійних форм // Изв. КПИ и Киев. с.-х. ин-та. — **1**, вип. 1. — С. 72–80.
13. Замітка про рівнання Briot та Bouquet // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту. — **1**. — С. 101–103.
14. Новий довід одної теореми Міньковського // Наук. зап. Київ. н.-д. каф. — **1**, вип. 2. — С. 66–70.
15. Про алгебричну теорему додавання // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту. — **1**. — С. 104–106.
16. Про одиниці поля $R(\sqrt[3]{\rho})$ // Изв. КПИ и с.-х. ин-тов. — **Кн. 1.**, вып. 1. — С. 17–18.

17. Простір, час, матерія (до теорії релятивности) // Червоний Шлях. — № 4–5. — С. 226–244.

18. Démonstration du théorème fondamentale d'algèbre // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 1. — S. 28–29.

19. Note sur la longuer de la circonférence en non-euclienne géométrie // Ibid. — S. 28.

20. Note sur l'interpolation généralise / Proceeding of the International mathematical Congress, Toronto. — P. 657–658.

1925

21. Математика для сільсько-господарських профшкіл / М.П. Кравчук, І.П. Білик. — ДВУ. — 354 с.

22. Доказ основної теореми альгебри // Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ. — **23**, **24**. — С. 49–52.

23. До теорії кореляції // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту. — **3**. — С. 43–47.

24. Замітка про обвід кола в неевклідовій геометрії // Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ. — **23**, **24**. — С. 53–54.

25. Інтерполяція та деякі питання з функцій дійсного змінного. І // Зап. фіз.-мат. відділу УАН. — **1**, вип. 3. — С. 70–74.

26. Інтерполяція та деякі питання з функцій дійсного змінного ІІ. // Там само. — С. 74–82.

27. Про розчинювання кришталів та кришталізацію // Зап. н.-и. каф. технол. с.-х. пр-ва при КПИ. — С. 222–225.

28. Сучасний атомізм // Червоний Шлях. — № 6–7. — С. 194–223.

1926

29. Zur Theorie der Determinanten // Зап. фіз.-мат. відділу УАН. — **2**, вип. 1. — С. 77–80.

30. До теорії функцій дійсного змінного // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти. — 1. — С. 94–100.

31. Замітка про обвід кола в неевклідовій геометрії // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **1**. — С. 74–75.

32. Перемінні множини лінійних перетворень // Там само. — С. 25–51.

33. Про Green'ове та Stokes'ове перетворення // Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ. — **25**. — С. 82–92.

34. Про кореляцію // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту. — **4**. — С. 43–60.

35. Про нормальний закон розподілу при двох змінних ознаках / М.П. Кравчук, А. А. Оконенко // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **1.** — С. 95–99.

36. Про остачу Lagrange'ового ряду // Зб. мат.-природноопис.-лікар. секції НТШ. — **25.** — С. 46–48.

37. Про спосіб М. Крилова в теорії наближеної інтерполяції диференціяльних рівнянь // Тр. фіз.-мат. відділу УАН. — **5**, вип. 2. — С. 12–33.

38. Про суцільність коренів цілої трансцендентної функції // Вісти КПІ. — **Кн. 1.** — С. 63–64.

39. Über die partielle Integration // Зап. фіз.-мат. відділу УАН. — **2**, вип. 1. — С. 77–80.

40. Програми з курсу «Елементи вищої математики в пристосуванні до сільського господарства» // Програми сільсько-господарських технікумів рільничного типу. — К.: Вид-во НКО. — Ч. 1.

41. Програми з математики // Програми сільсько-господарських профшкіл рослинознавства. — К.: Вид-во НКО.

42. Note sur les déterminants // Ibid. — P. 72–74.

43. Note sur la distribution des racines des polynômes dérives // L'Enseignement Math. — **25**, № 3. — P. 74–77.

44. Note sur le reste d'une série de Lagrange // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 4. — S. 6.

45. Sur la méthode de N. Kryloff pour l'intégration approchée des équation de la physique mathématique // C. r. Acad. sci. — **183**, № 9. — P. 474–476.

46. Sur la distribution des nombres premiers // C. r. Acad. sci. — **183**. — P. 1008–1009.

47. Über die Sätze von Green und Stokes // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 4. — S. 10–11.

48. Über mengen vertauschbarer Matrizen // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **2**. — С. 80–82.

1927

49. До способу моментів у математичній статистиці // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **2**. — С. 83–95.

50. Замітка з приводу теореми Cauchy // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН. — **2**, вип. 2. — С. 33–36.

51. Замітка про спосіб М. Крилова для наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь математичної фізики // Там само. — С. 5–8.

52. Замітка про Taylor'ову формулу // Там само. — С. 1–14.

53. Праці кафедри математики та варіаційної статистики за 1923–1927 р. // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **3**.

54. Про деякі перетворення кратних інтегралів // Там само. — С. 77–88.

55. Про умови існування похідних у функцій дійсного змінного // Зб. мат. природопис.-лікар. секції НТШ. — **26**. — С. 85–96.

56. Про одну Hermite'ову формулу // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **2**. — С. 80–82.

57. Про ортогональні перетворення / М. Кравчук, О. Смогоржевський // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти. — Кн. 2. — С. 151–156.

58. Про похідні від наближених інтегралів деяких диференціяльних рівнянь // Вісті КПІ. — 21. — С. 3–10.

59. Про спосіб найменших квадратів та спосіб моментів у теорії наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь // Там само — С. 11–18.

60. Розподіл первісних чисел по підставленнях групи алгебричного рівняння // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН. — **2**, вип. 2. — С. 25–32.

61. Формула Стірлінга / М. Кравчук, В. Левицький // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **2**. — С. 89–90.

62. Sopra un teorema generale di Kronecker // Bolletino del l'Unione Mathematica Italiana. — **6**. — P. 12–15.

63. Sur la l'existence des dérivées supérieures // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 8. — S. 12–16.

64. Sur les fonctions analytiques à singularités réels // C. r. Acad. sci. — **185**. — P. 1106–1107.

65. Sur les pôles des fonctions analytiques // Ibid. — P. 336–339.

66. Sur les pôles des fonctions méromorphes // Ibid. — P. 178–180.

67. Über die Existenz der Differentialquotienten höherer Ordnung // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 7. — S. 5.

68. Über vertauschbare Matrizen // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — **51**, № 2. — P. 126–130.

1928

69. Замітка про існування кореня в алгебричного рівняння // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти. — № 3. — С. 247–250.

70. Замітка про контурні інтеграли // Зб. мат.-природнопис.-лікар. секції НТШ. — **27**. — С. 129–131.

71. Математика (бібліографічний огляд) /Науково-дослідний і науково-видавничий рух Радянської України на рік 1927 // Україна. — № 6–7. — С. 97–99.

72. Математична наука на Україні (за десятиріччя 1918–1928) // Українські вісті (Париж). — № 76.

73. Нотатки з подорожі // Кузня освіти. — № 2. — С. 3–6.

74. Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів // Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ. — **27**. — С. 115–128.

75. Про зростання організмів // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти. — № 1. — С. 36–38.

76. Sur une application du théorème de Sturm // Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna. — **2.** — P. 87–88.

77. Sur l'intégration approchée des équation différentielles linéaires // Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna. — **6**. — P. 109–115.

78. Sur la convergence des certaines continues fractions // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 9. — S. 11–12.

79. Sur la convergence de quelques procédés de l'intégration approchée des équations différentielles // C. r. Acad. sci. — **187**. — P. 411–412.

1929

80. Алгебричні студії над аналітичними функціями // Тр. фіз.-мат. відділу ВУАН. — **12**, вип. 1. — С. 3–34.

81. Звідомлення з поїздки на Всесвітній Математичний Конгрес у Больонії та у Парижі. — Львів: Вид-во НТШ. — 13 с.

82. Про застосування способу моментів до наближеного розв'язання інтегральних та диференціяльних рівнянь // Вісті КПІ. — Кн. 2. — С. 93–108.

83. Про інтерполяцію з допомогою ортогональних многочленів // Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **4**. — С. 21—28.

84. Промова на врочистому засіданні Київської міської ради 6.XI.1929 року // Вісті ВУАН. —№ 9–10. — С. 22–24.

85. Про наближене розв'язання лінійних диференціяльних рівнань // Зап. Харк. Мат. тов-ва та Укр. ін-ту мат. наук. — Сер. 4. — **3**. — С. 57–74.

86. Про наближене розв'язання лінійних задач математичної фізики // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН. — **4**, вип. 4. — С. 179—191.

87. Про наближене розв'язання рівнянь // Зап. Київ. с.-г. Ін-ту. — **4**. — С. 21–28.

88. Sur un généralisation des polynômes d'Hermite // C. r. Acad. sci. — **189**. — P. 620–622.

89. Sur la méthode de Laguerre pour la résolution approchée des équations // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 11. — S. 6.

90. Sur la méthode de W. Ritz pour l'intégration approchée des équations différentielles // Boletín Matemático Buenos Aires. — **2**. — 145–146.

91. Sur un problème de minimum // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 10. — S. 5—8.

92. Sur le recherche des nombres caractéristiques et des fonctions fondamentales // C. r. Acad. sci. — **189**. — P. 519—520.

93. Sur la résolution approchée des équations différentielles linéaires // Ibid. — P. 439–441.

94. Sur la résolution approchée des équations intégrales linéaires // Ibid. — **188**. — P. 978–980.

95. Sur la résolution des systèmes des équations intégrales linéaires // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 11. — S. 9–11.

96. Sur un théorème de Laguerre // C. r. Acad. sci. — **188**. — P. 299–301.

97. Привітання XV партконференції Київщини від Голови СНР ак. Кравчука від ім. наукових робітників // Бюлетень київської секції наукових працівників. — С. 6–7.

1930

98. Замітка про ортогональні перетворення // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН. — **4**, вип. 5. — С. 311–313.

99. Кілька висновків з Bessel'евої та Hadamard'ової нерівностей // Там само. — С. 249–267.

100. Про розв'язання систем лінійних диференціяльних рівнянь // Вісті КПІ. — **22**, вип. 1. — С. 23–36.

101. Уваги до Laguerre'ового способу наближеного розв'язання рівнянь // Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ. — **28, 29**. — С. 27–33.

102. Заключне слово на засіданні колективу ВУАН з приводу справи СВУ // Вісті ВУАН. — Рік 3, № 2. — С. 29.

103. Sur les dérivées des intégrales approchées de certaines équations différentielles // Rendiconti del Circolo Matmatico di Palermo. — **54**. — P. 194–198.

1931

104. Замітка про похибки суцільної інтерполяції дискретних імовірносних розподілів // Журн. мат. циклу ВУАН. — № 4. — С. 3–4.

105. Рецензія на працю акад. М. Крилова «Методи наближеного і символічного розв'язання диференціяльних рівнянь математичної фізики й техніки» // Там само. — № 2—3. — С. 89–90.

106. Про існування та наближене визначення розв'язок деяких лінійних рівнянь із частинними похідними // Зап. фіз.-мат. відділу УАН. — **5**. — С. 49–60.

107. Про існування та наближене визначення розв'язок деяких лінійних рівнянь із частинними похідними // Зап. природн.-техн. відділу ВУАН. — № 1. — С. 29–36.

108. Про наближення інтегралів рівнянь з частинними похідними еліптичного типу // Зап. фіз.-мат. відділу УАН. — **5**. — С. 9–18.

109. Про незводність деяких многочленів // Журн. мат. циклу ВУАН. — № 1. — С. 29–36.

110. Про обрамлені визначники // Там само. — № 4. — С. 5–13.

111. Про одно взагальнення Hadamard'ової нерівности // Зап. природн.-техн. відділу ВУАН. — № 1. — С. 90–95.

112. Про одну нерівність // Там само. — С. 96–101.

113. Про ортогональні многочлени, зв'язані зі схемами повернених та неповернених куль // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН. — **5**. — С. 19–48.

114. Про унітарні та ортогональні перетворення / М. Кравчук, О. Смогоржевський / Журн. мат. циклу УАН. — № 2–3. — С. 3–41.

115. Виступ акад. М. Кравчука на сесії Ради ВУАН 15.07.30 р. (Протоколи Ради ВУАН) // Вісті ВУАН. — № 3. — С. 25–26.

116. Note sur les déterminants // Sitz. Math. Naturwiss. Ärztl. Sekt. Ševčenko. — Ges. Wiss. — H. 15. — S. 5–7.

1932

117. Вступ до вищої математики / М. Кравчук, Г. Дрінфельд // Вид-во ВУАН. — 195 с.

118. Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціяльних та інтегральних рівнянь // Зап. природн.-техн. відділу ВУАН. — **7**. — С. 1–168.

119. Про розвинення в ряди розв'язок лінійних диференціяльних рівнянь // Журн. мат. циклу ВУАН. — № 1. — С. 7–31.

120. Кінцеве слово акад. М. Кравчука на сесії ради ВУАН // Вісті ВУАН. — Рік 5, № 1. — С. 48–49.

121. Sur le problème des moments // Verhandl. des Intern. Math. Kongr., Zürich. — **2**. — S. 127–128.

1933

122. Вибрані питання основ аналізи нескінченно малих / М. Кравчук, Д. Тополянський. — К.: Вид-во ВУАН. — 84 с.

123. Елементи теорії визначників / М. Кравчук, Г. Дрінфельд. — К.: Вид-во ВУАН. — 64 с.

124. Нові результати в способі моментів // Журн. мат. циклу ВУАН. — **1**, № 1. — С. 3–20.

125. Про задачу моментів // Там само. — С. 21–39.

126. Sur l'approximation des intégrales des équations différentielles linéaires // Зап. Харьк. мат. о-ва. — Сер. 4, **6**. — С. 1–18.

127. Sur la distribution des racines de polynômes orthogonaux // C. r. Acad. sci. — **196**. — P. 739–741.

1934

128. Вища математика. Посібн. для студ. та самоосвіти у трьох частинах. Ч. І. / М. П. Кравчук, А. Касяненко, В.І. Можар, О.С. Смогоржевський. — К.: Вид-во ВУАН. — 407 с.

129. Диференціальні рівняння та їх застосування / М. Кравчук, В. Можар. — К.: Вид-во ВУАН. — 184 с.

130. Принцип середнього арифметичного і спосіб найменших квадратів // Журн. Ін-ту математики ВУАН. — № 2. — С. 65–86.

131. Про одну алгебричну задачу в проблемі моментів // Там само. — С. 87–92.

132. Про одне трансцендентне рівняння // Тр. Киев. Авиац. Ин-та. — **3**.

133. Про точність наближення способом моментів розв'язок лінійних диференціальних рівнянь // Журн. Ін-ту математики ВУАН. — № 2. — С. 23–64.

134. З поточної роботи Інституту математики ВУАН // Вісті ВУАН. — № 6–7. — С. 18–19.

135. Науковці вирушили в похід ім. XVII партз'їзду / М.П. Кравчук, Ю.В. Пфейфер // За комуністичні кадри. — 17 січня.

1935

136. Вплив Ейлера на дальший розвиток математики. — К.: Вид-во ВУАН. — 46 с.

137. Другий Всесоюзний математичний з'їзд // Вісті УАН. — 1935. — № 1. — С. 59–74.

138. Академік Ю.В. Пфейфер (з нагоди 35-ліття науково-педагогічної діяльності) / Акад. М. Кравчук, акад. М. Крилов, Г. Дрінфельд, проф. Є. Ремез // Вісті УАН. — № 5. — С. 63–68.

139. Б. Я. Букреєв (з нагоди 50-ліття науково-педагогічної діяльності) / Акад. М. Крилов, акад. М. Кравчук, акад. Ю. Пфейфер, Б. Рибаков // Там само. — С. 67–72.

140. Замітка про Fourier'ів інтеграл / М. Кравчук, Д. Тополянський // Наук. зап. КДУ. — Мат. зб. — **1**, вип. 1. — С. 42–44.

141. Із роботи сектору математичної статистики УАН // Вісті УАН. — № 8–10. — С. 145–150.

142. Математика та математики в Київському університеті за сто років // Розвиток науки в Київському університеті за сто років. — К.: Вид-во КДУ. — С. 34–69.

143. Об одной алгебраической задаче в проблеме моментов // Докл. АН СССР. — **2**, № 2. — С. 89–93.

144. Общая характеристика научных школ, существующих в ВУАН и Киевском университете // Тр. II Всесоюзн. мат. съезда (Л., 24–30 июня 1934 г.) — Л., М.: Из-во АН СССР. — С. 48–50.

145. Одно обобщение приближения функций полиномами // Там само. — **2**. — С. 180–183.

146. О структуре перестановочных матриц // Там само. — С. 11–12.

147. Півстоліття науково-педагогічної діяльності акад. Д.О. Ґраве / Акад. М. Кравчук, акад. М. Крилов, акад. Ю. Пфейфер, проф. І. Штаєрман // Вісті УАН. — № 5. — С. 59–64.

148. Про деякі висновки з нерівності Lebesgue'а // Журн. Ін-ту математики УАН. — № 1. — С. 31–42.

149. Про задачу моментів // Там само. — № 2. — С. 13–34.

150. Про наближення многочленами функцій двох змінних в опуклих многокутних обсягах при певних умовах на межах тих обсягів // Журн. Ін-ту математики ВУАН. — С. 99–119.

151. Про одно узагальнення способу моментів у задачі наближеної інтеграції звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Там само. — № 3—4. — С. 77–98.

152. Про одну нерівність у проблемі моментів // Журн. Ін-ту математики УАН. — № 1. — С. 35–43.

153. Про оцінку похибок у лінійній задачі способу найменших квадратів // Наук. зап. КДУ. Мат. зб. — **1**, вип. 1. — С. 26–41.

154. Про середні похибки коефіцієнтів кореляції і регресії // Журн. Ін-ту математики ВУАН. — **1**. — С. 121–131.

155. Про Hermit'ову формулу механічних квадратур // М. Кравчук, С. Мовшиць // Наук. зап. КДУ. Мат. зб. — **1**, вип. 1. — С. 171–177.

156. Sur quelques inégalités dans le problème des moments // C. r. Acad. sci. — **200**. — P. 1567–1569.

157. Два ювілея / М. Кравчук, І. Штаєрман, Г. Дрінфельд, С. Мовшиць та ін. // За комуністичні кадри. — 25 травня.

1936

158. Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнань. — К.: Вид-во УАН, 1935. — 212 с. [Фактично книга за вихідними даними вийшла в 1936 р.].

Як «додаток» до книги вміщено 2 статті:

Деякі узагальнення при доборі операторів у застосуванні способу моментів до рівнянь з частинними похідними. — С. 165–168.

Про розвинення в ряди розв'язок лінійних диференціальних рівнянь. — С. 169–189.

159. Застосування способу моментів для рівнянь з частинними похідними // М. Кравчук, К. Латишева // Журн. Ін-ту математики АН УРСР. — № 1. — С. 3–22.

160. Математика на службе народного хозяйства // Научн. и метод. работа каф. математики Киев. индустр. ин-та.

161. Методична замітка про інтегрування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // М. Кравчук, М. Файн // Тр. Киев. Авиац. ин-та. — № 5. — С. 5–11.

162. Наближені обчислення в середній школі / М. Кравчук, М. Гельфанд, О. Вулах // Комун. освіта. — № 9. — С. 26—35.

163. Новий метод викладання логарифмів в середній школі / М. Кравчук, Б. Малінова // Там само. — № 1–2. — С. 96–104.

164. Об эквивалентности особенных пучков матриц / М. П. Кравчук, Я. С. Гольдбаум // Тр. Киев. Авиац. ин-та. — № 6. — С. 5–27.

165. Применение способа моментов для приближенного решения дифференциальных уравнений / М. П. Кравчук, Д. Б. Тополянский // Там само. — № 7.

166. Применение способа моментов к приближенному решению линейных дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах / М. П. Кравчук, К. Я. Латишева // Докл. АН СССР. — **1**, № 6. — С. 251–254.

167. Про групи комутативних матриць / М. Кравчук, Я. Гольдбаум // Тр. Киев. Авиац. ин-та. — № 5. — С. 12–23.

168. Про еквівалентність пар білінійних форм // М. Кравчук, Ю. Гроссберг // Наук. зап. КДУ. Фіз.-мат. зб. — **2**, № 3. — С. 13–26.

169. Про збіжність способу моментів для рівнянь з частинними похідними // Журн. Ін-ту математики АН УРСР. — № 1. — С. 23–28.

170. Про узагальнену проблему моментів // Там само. — № 4. — С. 3–9.

171. Спосіб моментів у застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь з правильними інтегралами // Вісті Акад. наук УРСР. — № 5—6. — С. 291–298.

172. Частота, імовірність та закон великого числа // Наук. зап. КДУ. Фіз.-мат. зб. — **2**, № 3. — С. 13–26.

1937

173. Об аппроксимациях в проблеме моментов для функций двух переменных // Докл. АН СССР. — **17**, № 6. — С. 279–281.

174. Об одном трансцендентном уравнении // Сб. н.-и. работ Киев. индустр. ин-та. — **2**. — С. 51–55.

175. О критерии линейной зависимости функций // М. Кравчук, М. Гордон // Там само. — С. 45–50.

176. О некоторых аппроксимациях в обобщенной проблеме моментов // Докл. АН СССР. — **14**, № 3. — С. 91–94.

177. О работах Института математики наук УССР // Успехи мат. наук. — 1937. — Вып. 3. — С. 249–251.

178. Про узагальнену проблему моментів // Вісті АН УРСР. — № 2–3. — С. 55–66.

179. Теорія подібності в середній школі // Комуністична освіта. — № 1. — С. 76–80.

180. До виходу з друку математичного збірника // За комуністичні кадри. — 29 травня.

1938

181. О распределении абсцисс механических квадратур гауссового типа // Изв. НИИ математики и механики при Том. ун-те. — **2**, вып. 1. — С. 57–62.

Редагування

1929–1930

1–6. І. Василенко, М. Гордон, З. Яновська, Робоча книга з математики, за ред. акад. М. Кравчука (в трьох частинах). Укр. та рос. — ДВУ.

1932

7. І. Василенко, М. Гордон, С. Дзюбенко, З. Яновська, бригадир — проф. М. Орлов, за ред. акад. М. Кравчука, Математика, підручник для семирічної політехнічної школи, V клас, ч. 1. — ДВУ.

8. В. Фурсенко. Символічні оператори сигма, дельта й факторіял за фаховою ред. М. Кравчука. — К.: ОНТВУ. — 52 с.

Републікації

1990

1. Письма В.И. Левицкому (1926—1931): (Публ. и коммент. П.К. Хобзея) // Очерки истории естествознания и техники. — Вып. 38. — С. 105–118.

1991

2. Математична наука в Україні (за десятиріччя 1918—1928). (Публ. та комент. П.К. Хобзея) // Там само. — Вып. 40. — С. 60–64.

2000

3. Науково-популярні праці / Укл. Н. Вірченко. — К. — НТУУ (КПІ). — 232 с.

2002

4. Вибрані математичні праці / Упорядник Н. Вірченко. — К. — НТУУ (КПІ). — 792 с.

ЗМІСТ

Національний технічний університет України «КПІ»
Педагогічний музей України

Серія «Педагогічні републікації»
Випуск 1

МИХАЙЛО КРАВЧУК

ВИБРАНІ ПРАЦІ
ІСТОРІЯ І МЕТОДИКА МАТЕМАТИКИ

Підписано до друку 5.05.2014.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Друк. арк. 13,63. Умовно друк. арк. 12,65
Зам. № 224. Наклад 200 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012