Т-во „ДЗВІН“.

Видавництво „УКРАЇНСЬКА ШКОЛА“

під редакцією С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка.

Олександр Коваленко

Практична ґеометрія

Підручник для вищих початкових шкіл та для молодших кляс шкіл середніх

Книжка I

З 67 рисунками в тексті.

Київ - Відень - Харків.

1919-року.

Т-во „ДЗВІН“.
Видавництво „УКРАЇНСЬКА ШКОЛА“
під редакцією С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка.

Олександр Коваленко

Практична ґеометрія

Підручник для вищих початкових шкіл та для молодших кляс шкіл середніх

Книжка I

З 67 рисунками в тексті.

Київ - Відень - Харків.
1919-року.

Присвячую світлій пам'яти мого ученика Миколи Докса.

Від автора.

Кождий, хто досліджував розвинення інтеллектуальних здібностей дитини, знає, скільки цікавости виявляють діти до тих питань, які більше або менше тісно звязані з ґеометрією, з того моменту, коли вони починають відноситись свідомо до того, що їх оточує. Та й хто взагалі не спостерігав, з якою охотою, часом з яким захопленням, беруться вони до всякого роду обмірювань, до вирізування з паперу всяких фіґур, як часом влучно роблять вони спостереження при розгляді ґеометричних форм? Поруч з цим давно уже стало загальновідомим, що до тієї ґеометрії, яку звичайно викладають по школах, у величезної більшости дітей не тільки не можна спостерігти цікавости, а часто навпаки, доводиться спостерігати недвозначну огиду. Виходить, що ми стоїмо тут перед якоюсь суперечністю: той розділ шкільного навчання, який по своїй природі має усі данні для того, щоб зацікавити, може, часом захопити дитину, який міг би заняти у школі почесне місце поруч з таким розділом, як природознавство, до останнього часу є не чим иншим, як страховищем на іспитах та сінонімом нудоти в уявленню дитини. Не дивно, що під впливом викладів ґеометрії в школах та природна цікавість, про яку я згадував, у дитини, не тільки не розвивається, а навпаки, в міру того, як вона проходить клясу за клясою школи, глушиться і вяне, так що до моменту скінчення шкільної науки від неї часто не лишається і сліду.

Було б зайвою працею шукати окремих винуватців цієї сумної суперечности серед авторів підручників та учителів ґеометрії, — і серед тих, і серед других багато було й є людей, які сами ясно почувають увесь траґізм свого становища. Бо ж окремі особи з них, хоч які б були вони совістливі, а часом навіть талановиті, не мали спромоги знищити цієї суперечности або хоч зменшити її, і то власне тому, що вона коріниться в цілій сістемі навчання ґеометрії в школах, в сістемі, яка пронята наскрізь рутиною та яка утримувалась, і досі ще в великій мірі утримуеться самими вимогами офіціальних проґрамм усяких шкіл.

Грунтовною хибою цієї сістеми є цілковите нехтування інтуіції, яка є дужим фактором в процесі шукання шляхів до істини, надто в дитячому віці, коли здібність до лоґічного способу думання ще мало розвинена. В шкільній ґеометрії ще й досі панує метод стародавнього Евкліда, в якім лоґіка цілком вигнала інтуіцію. В ній дитина мусить доходити до якоїсь істини, до якогось твердження стежкою — часом дуже покрученою — лоґічних міркувань навіть тоді, коли вона могла б туди дійти простою стежкою інтуіції, і часто ті лоґічні міркування бувають навіть для підлітків середнього віку непосильною і через те скоріш шкодливою ніж корисною ґімнастикою розуму.

З цієї грунтовної хиби походять усі инші. Так, наприклад, додержуючись виключно лоґічних міркувань, цей метод майже зовсім не потрібує наочного способу виявлення де-яких ґеометричних істин і тому зовсім його нехтує. А проте інтуіція тут мусить іти саме в парі з наочністю, не кажучи вже про ту цікавість для дітей, яку має в собі всяке наочне виявлення того, що їм неясно відразу. Крім того, через неприступність загально принятого методу викладання ґеометрії для дітей молодшого віку навчання її, наприклад по середніх школах, починаеться тільки з 4-го або й з 5-го року, тоді як цікавість до ріжного роду ґеометричних форм у дітей з'являеться багато раніш. І хоч, таким чином, для дитини губляться яких 2 чи 3 роки, та навіть і в тому віці, в якім вона береться до виучення ґеометрії у школі, воно, через метод навчання, часто буває для неї надсильною працею, і тому самий зміст цієї галузі науки губить для неї свою природну привабність.

Ще Шопенгауер у своїм творі „Die Welt als Wille und Vorstellung" гостро критикував метод ґеометрії Евкліда, називаючи лоґічний спосіб для доведення істин, які нам ясні і без того, милицею для здорових ніг, та порівнюючи прихильників цього методу з подорожнім, який у ночі бере твердий рівний шлях за воду і тому мандрує побіч по грудках та ямах. Та треба було, щоб з того часу пройшло майже ціле сторіччя, доки цей погляд німецького фільозофа стали класти в основу критики навчання в школах ґеометрії; тільки недавно в цій сфері повіяло новим духом: по де-яких школах Америки, Анґлії, а потім і Европи стали викладати ґеометрію, починаючи ті виклади з наймолодших клясів і ведучи їх по новій методі, збудованій на прінціпах наочности. В сфері спеціальної літератури стали з'являтися підручники ґеометрії згідні з цією новою методою. Але поки що тільки спроби, які, правда, дали уже свої наслідки, і то дуже показні. Порівнюючи з тією величезною кількістю, в якій виходять що-року підручники старого типу, число цих спроб в сфері шкільної літератури є дуже незначне. Це й надало мені сміливости, замісць того щоб взятися до перекладу якого-небудь з уже істнуючих підручників, випустити в світ цю книжку, яка містить в собі частину того курса, що я викладав в молодших классах „Новой Русской Школы" в Парижі. Це є перший концентр елементарних знань з ґеометрії.

Нажаль обставини, за яких доводиться її публікувати, як і той спіх, до якого спонукує мене нагальність справи з шкільними підручниками на Україні, примусили мене значно її скоротити і тим, може, зробити її зміст занадто схематичним і сухим. Потішаю себе надією, що ті з молодих учителів, які, не маючи ще досить власного досвіду, мають любов до свого діла та добру волю, зуміють, коли ця книжка попаде їм до рук, з власної ініціативи поширити ті вузькі рямці, в які, силою обставин, мені довелося убгати багатий сам в собі матеріал. Може, діждавшися більш сприяючих обставин, я спроможуся на нове її видання, — тоді я подбаю про те, щоб поповнити її зміст, а заразом і виправити те, що, може, в ній не до ладу. З огляду на таку надію я був би щиро вдячний за всякі вказівки, висловлені чи то в формі публічної критики чи то приватним шляхом.

Слідом за цією книжкою маю намір випустити другу, яка має бути продовженням цієї, то б то другим концентром.

Ще кілька слів спеціально для учителів. Найголовнішою річю в викладанню ґеометрії є самодіяльність дітей, які повинні бути активними участниками цих викладів, а не лише пасивними слухачами їх. Тільки при цій умові вони проймуться цікавістю до ґеометрії, а здобуті знання будуть ними добре засвоєні. Тому виклади свої учитель повинен провадити так, щоб за його допомогою діти по можливости сами доходили до ґеометричних істин та тверджень. Крім того необхідно раз-по-раз супровадити ті виклади усякими практичними заняттями, як всякого роду обмірювання, порівнання, рисування діаґрам та вироблення моделів не тільки тих тіл, про моделі яких згадується у цій книжці, але також і всяких инших та, може, де-яких комбінацій з найпростіших тіл. Тоді, можна сказати з певністю, праця учителя дасть найкращі наслідки.

Київ, 22./VII. 1918 р.

О. Коваленко.

Вступ.

Про все те, що ми можемо бачити, або що ми можемо чути вухами, або до чого ми можемо ще й доторкнутися, ми кажемо, що воно існує (або єстнує). Ми кажемо, наприклад, що сонце існує, бо ми його бачимо; стіл існує, бо ми і бачимо його і можемо доторкнутися до нього; кажемо, що грім існує, бо ми чуємо його вухами. Ми кажемо про щось, що воно існує навіть і тоді, коли тільки знаємо, що воно таки єсть на світі. Так, ми кажемо, що море існує навіть і тоді, коли сами ніколи біля моря не були, бо ми чули про нього від тих людей, хто його бачив. Навіть про людське сумління (совість), про любов, про гнів ми кажемо, що вони існують, хоч ні того, ні другого, ні третього не можна ні бачити, ні чути, ні доторкнутися.

Те, що існує окремо від усього иншого, або що творить хоч окрему частину чогось цілого, існуючого окремо, ми зовемо річю. Коли, наприклад, я хочу когось запитати, що лежить або стоїть переді мною на столі, то я питаю так: „Які речі лежать на столі?“ І той, кого я запитую, відповість мені, наприклад так: „На столі є каламар, перо, олівець“, або „На столі є кухоль, миска, ложка, хліб.“

Отже, каламар, перо, олівець, кухоль, миска, ложка, хліб є окремі одна від другої речі. Я можу також запитати когось: „Що то є за річ грім?“ або: „Що то є за річ свист, або гомін?“ Значить і грім, і свист і гомін ми звемо річами. Так само можна говорити, як про окремі одна від другої речі, про людське сумління, про любов, про гнів *).

*) Слово річ вживається ще й в иншому розумінню, а саме: річю часом взивають те, що хтось говорить чи висловлює.

З величезної кількости найріжноманітніших річей кожен з нас одріжняє такі речі, до яких ми можемо доторкнутися, як от, наприклад, кухоль, миска, ложка, камінець, дерево, або до яких ми могли б доторкнутись, якби змогли наблизитись, як наприклад, хрест на церкві, місяць, що світить нам у ночі; або до яких ми доторкаємося усім нашим тілом, як от повітря, що оточує нас навкруги так само, як оточує нас вода, коли ми купаючись пірнаємо. Кожну з таких річей звуть **тілом**.

Виходить, тіла ми одріжняємо від таких річей, до яких ніяк доторкнутися не можна, як от, наприклад, грім, свист, гомін, або любов, гнів та таке инше, і які звуть **явищами**.

Уже з найстародавніших часів люди звертали свою увагу на все те, що істнує або що відбувається навкруги них, або і в них самих, тоб то на все те, що істнує або що відбувається в природі. Окремі люди серед ріжних народів, досліджуючи та пильно розглядаючи ріжні речі — чи то тіла чи явища — здобували все більше та більше відомостей, знань про ті речі та, або переказували те один другому або зазначали в книгах. Уся кількість зібраних таким чином знань та відомостей і творить те, що зветься **наукою**.

За дуже довгий час, впродовж якого люди ріжних країн працювали над наукою, назбіралась така величезна сила ріжних відомостей, знань про ріжні речі та явища, що уже здавна учені люди дбають про те, щоб в тім великім багатстві завести якийсь лад. З того повстали окремі **розділи науки**, або, як ще кажуть, окремі **галузі науки**. Відповідно тому, що саме мається на увазі при досліджению тієї або иншої речі, того або иншого явища, ми маємо до діла з тією чи другою галузею науки. Щоб це стало нам ще більше зрозумілим, я наведу тут такий приклад.

Візьмемо звичайну шклянку (стакан), натопчемо в неї вохкого піску та, постукавши потім у денце, як то часом роблять бавлячись діти, викладемо той стиснутий у шклянці пісок на стіл; так само зробимо з вохкою глиною та з чорною землею.

Коли, поставивши ті три зліпки на столі, ми запитаємо у кількох людей, чи однакові ті три речі чи ні, то почуємо ріжні відповіді: одні скажуть, що вони **неоднакові**, а другі, навпаки, скажуть, що вони **однакові**. Хто ж з них відповів правдиво? Чи ті, хто сказав, що вони неоднакові, чи ті, хто вважав їх за однакові? Коли ми докладніше роспитаємо тих і других, то побачимо, що кожен з них по свому має рацію, тоб то кожен з них дає правдиву відповідь. Та й справді, одні казатимуть: „Ті три зліпки зовсім неоднакові, бо один з них — зтислий пісок, другий — зтисла глина, а третій — зтисла земля; та ще до того один з них сірий, другий жовтий, а третій чорний.“ Другі казатимуть: „Ті три зліпки таки зовсім однакові, бо всі мають однакову форму.“ Отже, як бачимо, мають рацію, і ті, що відповіли — ні, і ті, що відповіли — так. Чому же так вийшло, що й ті й другі, відповідаючи нам по ріжному, однаково мають рацію? А тому, що ті, які вважають ті зліпки за неоднакові, мають на увазі тільки те, з чого кожен з тих трьох зліпків зроблено, а ті, що вважають їх за однакові, мають на увазі тільки їхню форму. Через те на наше питання, чи вони однакові, найкращою відповідю була б така: „Ті три зліпки, мовляв, і неоднакові і однакові. Як мати на увазі тільки те, з чого вони зроблені, то ми мусимо їх вважати за неоднакові, як же брати на увагу тільки те, яку вони мають форму, то мусимо їх вважати за однакові.“

Щось подібне буде також тоді, коли, показавши кільком людям яку-небудь річ, запитаємо їх, що вони можуть про неї сказати. Один скаже, що вона легка чи тяжка, другий — що вона тверда чи мняка, третій — яка вона на колір, четвертий — з чого вона зроблена, пятий — яку вона має форму і таке инше. Кожна з цих відповідей буде доречі, або недоречі, дивлячись по тому, що саме ми мали на увазі, питаючи про ту річ тих людей.

Таким чином, щоб добре дослідити усяку річ, усяке явище, треба, розглядаючи ту річ або явище та обміркуючи їх, мати на увазі кожного разу щось одно, а не все одразу, що тільки може відноситись до тієї речі або до того явища. Або, як ще кажуть, треба розглядати ту річ або те явище кожного разу з якоїсь однієї точки погляду, а не з усіх можливих точок погляду одразу. Тим більше такий порядок необхідний, коли доводиться розглядати та досліджувати багато усяких річей або явищ, як то доводиться робити в науці. З цього й виникає необхідність поділяти науку на окремі розділи або на окремі галузі. В кожній окремій галузі науки усякі речі, усякі явища світу або природи розглядаються та досліджуються в тієї або иншої точки погляду.

У цій книжці ми познайомимося з тим розділом науки, який зветься: Ґеометрія. Це слово походить з грецької мови і значить по нашому землемірство. Така назва цього розділу науки виникла з того, що основою для неї послужили ті знання, якими користувалися люди ще в дуже давні часи для обмірювання своїх нив. Тепер ґеометрія містить в собі більше иншого, ніж того, що потрібно для землемірства; та проте це назвище так уже й зосталося при цьому розділі науки.

Що ж власне мають на увазі в ґеометрії, та чому в ній навчають?

Дати цілком докладну відповідь на це питання зараз було б важко, бо для цього нам довелося б говорити про речі, незовсім зрозумілі читачеві, для якого призначається ця книжка. Та все таки де-що про це вже можна сказати й тут. Для того вернімося до наведеного вище прикладу з трьома зліпками. Ті, що відповідатимуть нам на наше питання, що ті три зліпки, з піску, з глини та з землі, однакові, мають на увазі, як ми уже зазначили, тільки форму або образ тих зліпків та залишають зовсім без уваги те, з чого кождий з них зроблено, або який кожен з них на колір, та таке инше. Отже, коли ми розглядаємо чи досліджуємо тіла, маючи на увазі тільки їх форму, ми кажемо, що ми їх досліджуємо з точки погляду ґеометрії. Значить можна сказати, що ґеометрія є той розділ науки, в якому досліджують та розглядають тіла, беручи на увагу тільки їх форму, або їх образ, та зовсім не беручи на увагу, ні скільки те тіло важить, ні яке воно на колір, ні якої воно твердости і т. и. В такім разі це кажуть, що тіло досліджують чи розглядають, як ґеометричне тіло, а про ґеометрію кажуть, що вона є той розділ науки, який має на увазі ґеометричні тіла та все те, що до них так або инакше стосується.

Ріжних, як по своїй формі, так і по своїй великости, тіл на світі так багато, що булоб зовсім неможливо розглянути та дослідити їх усі. Через те в ґеометрії розглядають тілько де-які з них, а саме ті, що по своїй формі найвизначніші. Так робимо й ми у цій книжці.

Щоб улегшити таке дослідження усяких ґеометричних тіл, ми почнемо наш розгляд з найменш складних та поволі переходитимемо до більш складних.

Кожне з ґеометричних тіл, які розглядають у ґеометрії, звичайно має свою назву. Де-які з тих назв взято з чужоземних мов; вживаючи таких назв, ми поруч з ними наводитимемо також і наші українські назви.

Але раніш, ніж перейти до такого розгляду ґеометричних тіл, подамо тут де-які уваги, необхідні для того, щоб добре розуміти усе, що буде далі говорено.

I. Рисунки.

Те, про що доводиться говорити в ґеометрії, часом трудно, а як коли то й неможливо, розуміти без рисунків та малюнків. Через те читач знайде їх у цій книжці на тім місці, де це необхідно. Щоб було зрозуміло, про який саме рисунок чи малюнок говориться, під кожним з них стоїть номер по порядку, починаючи від номера 1-го, а в тім місці книжки, де саме говориться про той чи инший рисунок, зазначується в скобках його номер. Але часом доводиться говорити не про цілий рисунок, а про якусь його частину, тоді, щоб знати, яку саме його частину мається на увазі, на рисункові в де-яких його місцях ставляться літери (букви).

Так наприклад, коли б треба було мати на увазі увесь оцей рисунок, що стоїть тут на цій сторінці, то треба зазначити так: (рис. 1.), коли ж треба було б мати на увазі тільки його ліву половину, то треба те зазначити тими літерами, що стоять по кутах тієї частини, тоб то так: *ABHK* (вимовляється: *а-бе-аш-ка*).

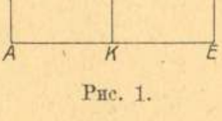


Рис. 1.

Коли б довелося говорити тільки про одну лінію цього рисунку, наприклад ту, що проходить посередині рисунка, то треба було б зазначити її тими літерами, що стоять на обох її кінцях, значить треба було б сказати: лінія *HK* (вимовляється: лінія *аш-ка*).

Здавна заведено вживати для того літери латинські, в якій би мові ґеометрія не писалася. Ото ж читач мусить знати ті літери та уміти їх вимовляти. Для того тут він знайде ці літери.

Літери латинського (французського) альфабету.

A, a вимовляється а	I, i — і	R, r — ер
B, b — бе	J, j — жі	S, s — ес
C, c — це	K, k — ка	T, t — те
D, d — де	L, l — ель	U, u — у
E, e — е	M, m — ем	V, v — ве
F, f — еф	N, n — ен	W, w — дубль-ве
G, g — же	O, o — о	X, x — икс
H, h — аш	P, p — пе	Y, y — іґрек
	Q, q — ку	Z, z — зет

Коли часом не вистачає цих літер, тоді крім них вживають такі таки літери тільки з маленькими цифрами, які ставлять з правого боку знизу; наприклад так: A_1, b_3, X_2 і т. д. Вимовляти тоді треба так: *а — перше, бе — третє, икс — друге* і так далі.

II. Міри довжини або міри лінійні.

Для обмірювання довжини по ріжних країнах вживають ріжні міри. Наприклад у нас — вершок, аршин та сажень. Та здебільшого вживають міри французські, які звуться *метричними мірами*, через те що основною серед тих мір є міра, що зветься *метр*. Метр довжиною приближно $22^1/_2$ вершки. Подаємо тут де-які з метричних мір.

Основна міра, *метр*, поділяється на 100 частин, і сота частина метра зветься: *сантіметр*; сантіметр поділяється на 10 частин, а кожна частина зветься: *міллімeтр*.

1000 метрів творять міру, що зветься: *кільометр*; ця міра мало менше верстви і вживається для обмірювання великих просторів, як наприклад віддалення одного міста від другого.

Тут нарисовано (Рис. 2) мірку в десять сантіметрів; кожний сантіметр поділено на десять частин то б то на мілліметри. Щоб можна було порівняти сантіметри з вершками, під цією міркою нарисовано другу, що має в собі два вершки. Як бачимо, 2 вершки мають в собі 89 мілліметрів або 8 сантіметрів і 9 мілліметрів. Для того, щоб можна було робити всякі обмірювання, кожен з читачів цієї книжки може зробити собі мірку в 20 чи в 30 або й більш сантіметрів. Для того треба тільки взяти рівненько згорнутий в смужку шматок паперу, або смужку картону та, користаючись поданим тут рисунком, назначити на ній сантіметри поділені на мілліметри.

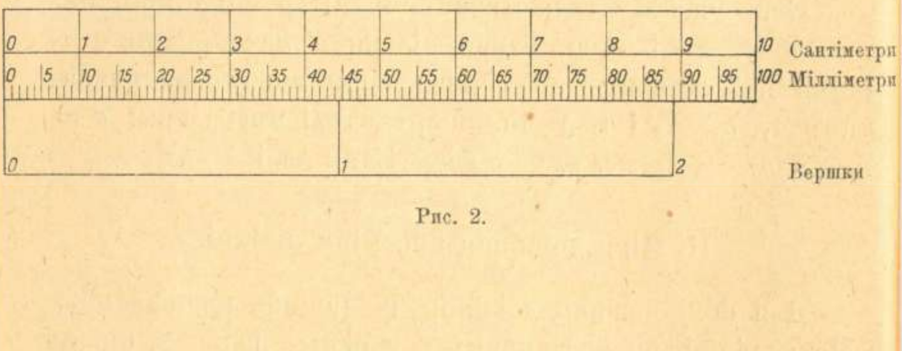


Рис. 2.

Рисун №812

Геометричні тіла.

1. Брус або Параллелепіпед.

Деревину, обтесану та обстругану з чотирьох боків та рівненько відпиляну з двох кінців звуть деревянним брусом. Такі бруси роблять часто для сволока, коли будують хату, з таких брусів, тільки вже тонших, часом роблять ніжки в звичайному столі. Дошка, коли тільки її не зтесано (не зножовано) по краях, хоч і плескувата, та має теж подібну форму. Так само подібну форму мають і цеглина, і скринька (коробочка) з під шведських сірників. Через те і деревлянний брус і цеглина, і скринька з під шведських сірників уявляють однакове ґеометричне тіло, яке у ґеометрії зветься: Брус або Параллелепіпед. Взірець або, як ще кажуть, модель такого бруса можна легко зробити з картону. Такий взірець змальовано тут на рисункові 3-му. Коли ми дивимось на якесь тіло, то ми не можемо бачити його з усіх боків одразу, — завжде є така частина того тіла, якої нам невидко. Так само й тут: дивлячись на взірець бруса, ми бачимо його

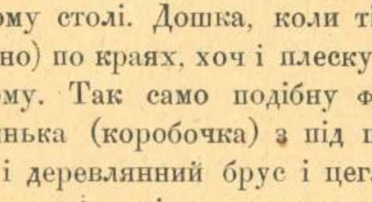


Рис. 3. Брус.

тілько з трьох боків, то б то тільки три його стінки, наприклад передню, праву, та горішню, як то змальовано на цьому рисункові (Рис. 3); значить стінок: лівої, спідньої та задньої нам невидко. Та щоб зазначити і їх якось на рисункові, ми обкреслили їх переривчастими лініями (лінії *AG*, *EG* та *GH*). Так ми робитимемо й надалі, коли нам буде треба зазначати на рисункові такі лінії, яких ми не бачимо, дивлячись на змальоване по тому рисункові тіло з якогось боку, — то б то рисуватимемо такі лінії *переривчастими лініями*, що инакше ще звуться *пунктірними лініями* або коротше *пунктіром*.

Перейдемо тепер до розгляду бруса або параллелепіпеда, як ґеометричного тіла. Для того візьмемо за взірець або за модель бруса хоч звичайну цеглину, хоч скриньку з під шведських сірників, а як і того немає, то хоч покладімо перед собою сей рисунок, що тут є в книжці. (Рис. 3).

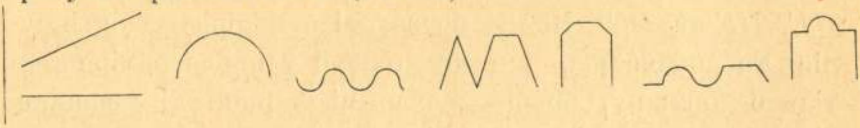
Розглядаючи уважно такий взірець, ми мусимо перш над усе зазначити, що ми вважаємо його за окреме ґеометричне тіло тільки тому, що він, цей взірець, чимсь відокремлений від тієї простороні, яка сама собі не має кінця й краю ні в один бік. Яке б ґеометричне тіло ми не взяли, воно так само тому тільки й є окреме тіло, що з усіх боків чимсь відокремлене від усієї простороні. Отже, те, що відокремлює всяке ґеометричне тіло від простороні, зветься його п о в е р х н е ю. Поверхня тіла може бути такою, що ми її вважаємо за одне ціле, не складене з окремих частин, як от наприклад поверхня ґеометричного тіла, подібного до курячого яйця, або такою, що ми відріжняємо в ній окремі її частини, з яких вона складається, як ми то бачимо на взірцеві бруса, що зараз розглядаємо Коротше сказати: поверхні ґеометричних тіл бувають *нескладні*, як от поверхня тіла, подібного до курячого яйця, і *складні*, як от поверхня нашого бруса, яка складається з шости окремих частин, що звуться *стінами бруса*. Розглядаючи рисунок бруса

(Рис. 3), ми можемо визначити кожну з його шісти стін, користуючись для того французськими літерами, поставленими на рисункові. Три стіни, що нам їх видно, а саме: передня стіна *ABCD* (треба вимовляти: стіна а-бе-це-де), верхня або горішня стіна *BEFC* та права стіна *CFHD*: та ще три, яких нам невидко, а саме: спідня або долішня стіна *AGHD*, ліва стіна *ABEG* та задня стіна *EFHG*. А усього, значить, шість стін; тому можна сказати, що брус є *шостистінник*. Верхню стіну звуть иноді *верхньою основою* бруса, а спідню стіну — *спідньою основою*.

Кожда пара сумежних стін, зтикаючись одна з другою та одна другу ніби відтинаючи, в тім місці, де вони зтикаються, творять *руб*. Таких рубів у бруса маємо дванадцять (Рис. 3), а саме: чотирі нагорі (руб *BC*, руб *BE*, руб *EF* та руб *CF*), чотирі насподі (руби: *AD, AG, GH* та *DH*), та чотирі, що стоять сторч (руби: *AB, GE, HF* та *DC*). Колиб ми захотіли обміряти який з рубів, то побачили б, що ми можемо у нього обмірювати тілько довжину, бо він не має ні ширини ні товщини. Те, що можна обмірювати тільки в довжину, звуть у ґеометрії *лінією*. Значить, кожен з рубів нашого бруса є лінія. Так само ми вважаємо за лінії ті риси, які ми робимо олівцем (карандашем) чи пером на папері або крейдою на дошці, бо в тих рисах ми беремо на увагу тільки їх довжину і нічого иншого. Самий край усякої лінії, то б то те місце, де саме вона починається або кінчається, звуть *точкою*. Ті точки, в яких сходяться три сумежні стіни бруса та три його руби, звуться *вершками* бруса. Таких вершків брус має вісім, то будуть саме ті точки на нашому рисункові (Рис. 3), біля яких стоїть кожна з літер: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* та *H*.

Лінії. Придивившись до рубів нашого бруса, ми зауважемо, що кожен з них уявляє собою таку лінію, яка тягнеться усе в однім напрямку і нігде не збочує з того напрямку. Такі лінії звуть *простими лініями* або коротше *простими.* Коли хтось переходе з одного місця на друге, не ухиляючись од свого напрямку, то б то йдучи увесь час по простій лінії, то кажуть, що він переходе *навпростець.* Отже кожен з 12-ти рубів бруса є проста лінія.

Зазначимо таки зараз, що крім простих ліній, істнують также і инші, а саме: є лінії, які тягнуться так, що увесь час зміняють свій напрямок; такі лінії звуть *кривими лініями* або коротко *кривими.* Коли лінія ніби складається з простих ліній, зіткнутих одна з другою кінцями так, що кожна з двох сумежних або сусідніх простує в инший бік, то ціла така лінія зветься *ламаною лінією.* Нарешті лінія може бути складана з прямих та з кривих, тоді її звуть мішаною лінією. Подаємо тут рисунок ріжних ліній (Рис. 4).



Прості лінії. Криві лінії. Ламані лінії. Мішані лінії.

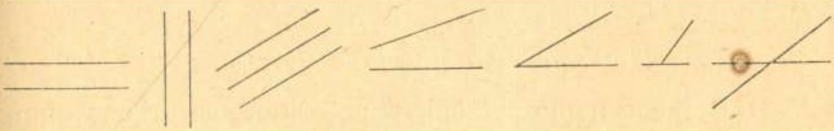
Рис. 4.

Для того, щоб рисувати прості лінії, вживають лінійку. Звичайно лінійка може бути залізною або з якогось иншого матеріалу, аби тільки її руби були простими лініями. Щоб нарисувати, користуючись лінійкою, просту лінію, її кладуть на папір та ведуть олівцем (або пером) по паперу так, щоб він увесь час прилягав до лінійки. Так само роблять, коли хочуть провести таку лінію крейдою на дощці. Коли таку лінію треба провести на довгій дощці, то беруть довгий шнур, намазують його крейдою (або вуглем), натягають туго з двох кінців, як струну; потім трохи відтягнувши того шнура пальцями, пускають його; натягнутий шнур удариться об дошку та крейдою (або вуглем) зазначить на ній просту лінію.

Поверхні. Коли ми візьмемо лінійку та будемо прикладати її руба до якоїсь з стін бруса, то побачимо, що як би ми її не повернули, чи вдовш стіни, чи впоперек, чи як-небудь навскіс, лінійка усе прилягатиме щільно, то б то усіма точками свого руба. Коли ми спробуємо прикладати таким самим способом ту лінійку наприклад до поверхні залізного цебра (відра), то вона притулятиметься до тієї поверхні всіма точками свого руба тільки тоді, коли ми покладемо її вдовш цебра; коли ж ми покладемо її якось инакше, то вона притулятиметься тільки однією точкою. Коли ми прикладатимемо її до поверхні тіла подібного до мняча або до курячого яйця, то, як би ми її не прикладали, вона ніколи не притулиться до тієї поверхні усіма точками свого руба. Такі поверхні, до яких проста лінія (руб лінійки) дотикається всіма своїми точками, в який би бік на поверхні та лінія не прямувала, звуться *плоскими поверхнями* або *площами;* такі ж поверхні, до яких проста лінія може дотикатись усіма своїми точками тільки в одному єдиному якомусь напрямкові (поверхня цебра), або такі, до яких проста лінія не може притулятися усіма своїми точками ні в якім напрямку (поверхня мняча), звуться *кривими поверхнями.* Отже, кожна з стін руба є площа, а поверхня цебра, поверхня мняча або тіла, подібного до курячого яйця, то все — криві поверхні. Поверхні, які складаються з окремих площ, зіткнутих поміж собою своїми краями, можна звати ламаними поверхнями, а такі, що складаються з площ та з кривих поверхонь, — мішаними поверхнями (подібно до ламаних та мішаних ліній).

Рівнобіжні та нерівнобіжні площі. Повернемось знов до нашого малюнка бруса, або ще краще до самого взірця бруса, коли у нас такий є, та приглянемося ще до його стін та рубів. Поміж його стінами є такі що стрічаються одна з другою в тім місці, де вони творять руб (Рис. 3). Такі стіни суть: передня $ABCD$ та верхня $BEFC$, а також передня та права, верхня та задня і так далі. Про такі площі кажуть, що вони перетинають одна другу або, коротше, що вони *перетинаються.* Коли ж ми подивимось на стіни, що лежать одна проти другої, то завважимо, що площі тих стін ніколи не стрінуться та не перетнуться, хочби як далеко вони простяглися в усі боки, бо одна відносно другої не віддаляються і не наближаються. Такі дві (або й кілька) площі, що лежать одна відносно другої так, що скільки б вони не простягалися в усі боки, вони ніколи не стрінуться одна з другою, звуться: *рівнобіжні* між собою, або *параллельні* площі. Коли дві площі нерівнобіжні (або непараллельні), то вони значить, простягаючись в якийсь бік, одна до другої наближатимуться, а значить ближче чи далі таки стрінуться. Звертаючись до нашого малюнка (Рис. 3), можемо зазначити, що у бруса одна з другою рівнобіжні ті стіни, що лежать одна проти другої, а саме: верхня $BEFC$ та спідня $AGHD$, а також передня та задня, ліва та права.

Рівнобіжні та нерівнобіжні прості. Подібно є й з рубами. Се б то, руб AB та AD (Рис. 3) стрічаються один з другим у точці A; так само й руби BC та DC або EF та CF та ще де-які инші. Ті ж руби, які тягнуться вздовш бруса, а саме руби AD, BC, EF та GH, скільки б вони не простягалися чи в той чи в другий бік, ніколи один з другим не стрінуться, бо вони йдуть один відносно другого не віддаляючись і не наближаючись. Такі прості лінії, що йдуть увесь час не віддаляючись і не наближаючись, звуться одна відносно другої: *рівнобіжні* або *параллельні.* Дві нерівнобіжні прості, коли вони лежать на одній площі, простягаючись у той чи у другий бік, неодмінно стрінуться в одній точці. Коли такі прості тягнуться й далі за ту точку, то про них кажуть, що вони *перетинаються* між собою. Коли нерівнобіжні прості лежать не в тій самій площі, то вони так, як і рівнобіжні, не можуть ні стрінутись ні перетятись. Тоді вони звуться: *мимобіжні.* Такі мимобіжні прості уявляють з себе (Рис. 3) руби *AD* та *CF* або *BC* та *DH* та инші. Подаємо тут на рисункові взірці простих ліній рівнобіжних, нерівнобіжних (або збіжних) та ще таких, що стрічаються та перетинаються поміж собою (Рис. 5). Зазначимо тут до речі, що кілька ліній, які творять щось одне ціле, звуть *ґеометричною фіґурою,*



Рівнобіжні прості. Нерівнобіжні (або збіжні) прості. Прості, що стрічаються та перетинаються.

Рис. 5.

або просто *фіґурою.* Ґеометричну фіґуру може уявляти з себе часом навіть і одна лінія. Таким чином, наприклад, кожна з окремих ґруп ліній на рисункові 5-му уявляє з себе окрему ґеометричну фіґуру; чотирі руба нашого бруса, які обкраюють або *обмежують* кожну з стін бруса, уявляють з себе також ґеометричну фіґуру. Коли ґеометрична фіґура така, що уся може лежати на площі, то її звуть *плоскою ґеометричною фіґурою,* або просто плоскою фіґурою. Очевидно, що кожна з фіґур на рисункові 5-му є плоскою фіґурою.

Задача. Показати, які стіни та руби у хаті рівнобіжні, які стрічаються, та які з рубів мимобіжні?

Замкнені ґеометричні фіґури. Розглядаючи стіни бруса, ми поперед усього зауважимо, що кожна з них уявляє з себе частину площі, обмежену з чотирьох боків простими лініями. Коли одна або кілька ліній замикають з усіх боків частину площі, то таку ґеометричну фіґуру звуть *замкненою ґеометричною фіґурою*. Значить, кожна з стін бруса є замкнена ґеометрична фіґура. На рисункові шостому показані взірці де-яких замкнених фіґур. (Рис. 6.) Чотирі перші (з ліва) з цих фіґур обмеженіількома простими лініями, одна обмежена однією кривою лінією і одна (остання) однією кривою та однією простою.

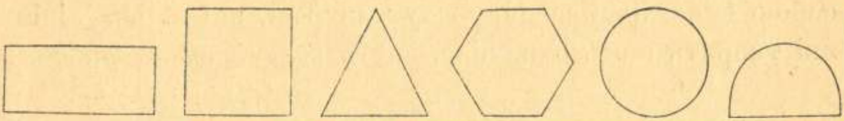


Рис. 6. Замкнені ґеометричні фіґури.

Покладемо наш брус спідньою стіною на стіл та, проводячи по столу крейдою по тих рубах, які обмежують ту стіну, обрисуємо її з усіх чотирьох боків; потім повернемо бруса до столу верхньою стіною і спробуємо покласти його на стіл так, щоб чотирі руба верхньої стіни прийшлися на тих чотирьох лініях, якими ми обрисували попереду спідню стіну. Ми це легко зможемо зробити. Так само можна зробити з передньою та з задньою стіною, а також з лівою та з правою З того виходить, що коли б ми могли зтулити якусь з стін з тією, що лежить навпроти неї, то б то з протилежною їй, то такі дві стіни зтулились би так, що накривали б цілком одна другу. Такі ґеометричні фіґури, які можна було б покласти одну на другу так, щоб вони одна другу цілком накривали, звуть *пристайними* ґеометричними фіґурами, то б то однаковими. Значить, спідня та верхня стіни бруса пристайні одна з другою так само, як і передня та задня або ліва та права. Коротко можна сказати, що *у бруса кожна пара протилежних стін одна з* *другою пристайні.* Нетрудно зауважити, що також усі руби, що йдуть удовш бруса, пристайні проміж себе, ті що йдуть упоперек — проміж себе, а ті що стоять сторч — проміж себе.

Кути. Розглядаючи уважно стіну того взірця бруса, який є перед нами, легко помітити, що усі три пари протилежних стін уявляють собою ґеометричні фіґури, схожі проміж себе. Через те досить буде розглянути докладно котру-небудь одну з тих стін. Візьмемо для того наприклад передню стіну. Щоб було зручніше нам про неї говорити, подаємо тут її на окремому рисункові (Рис. 7). На цьому рисункові ми бачимо, що ця стіна уявляє собою замкнену фіґуру, яка обмежена з чотирьох боків простими лініями. У такім разі кожну з тих простих ліній звуть *боком* фіґури.

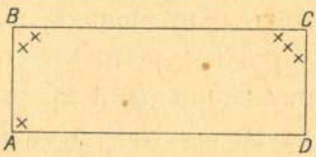


Рис. 7.

Значить, фіґура стіни нашого бруса має чотирі боки, а саме: бік AB бік BC, бік CD та бік AD. Ці боки подвоє рівнобіжні (параллельні): боки AB та CD рівнобіжні проміж себе, а боки BC та AD — проміж себе. Ті ж таки самі боки також і пристайні проміж себе, бо бік AB можна накласти на бік CD так, що вони один другого цілком накриватимуть; так само й з боками BC та AD.

Боки фіґури, яку ми зараз розглядаємо (Рис. 7), сходячись подвоє в одній точці, утворюють *кути.* Отже: бік AB та бік AD, сходячись у точці A творять кут, у якому поставлено один хрестик; бік AB та бік BC творять кут, у якому поставлено два хрестики, і так далі. Усього кутів у нашої фіґури чотири, значить стільки ж, скільки й боків. Замкнені фіґури, що мають чотирі боки, а значить і чотирі кути, звуться: *чотирикутники.* Значить, кожна з стін бруса є чотирикутник.

Прості лінії, які творять кут, звуться: *рамена кута,* а та точка, в якій сходяться ті рамена, зветься *вершком кута.* Так наприклад для того кута, у якому стоїть один хрестик (Рис. 7), точка A є вершок цього кута, а прості лінії AB та AD — його рамена. Щоб, говорячи про кути, можна було б знати, який саме кут ми маємо на увазі, їх визначають літерами (буквами), а саме так: або визначають кут однією тією літерою, яку поставлено біля його вершка, або визначають його трьома літерами: однією, що стоїть біля його вершка та ще двома, що стоять десь на його раменах, в такім разі ту літеру, що стоїть біля вершка, пишуть поміж двома другими. Так наприклад, коли ми хочемо визначити той кут, у якому поставлено один хрестик (Рис. 7), то ми пишемо так: кут A, або так: кут BAD, коли хочемо визначити кут, у якому поставлено два хрестики, то пишемо: кут B, або: кут ABC. Замість слова кут часто пишуть такий знак: $<$: читаючи, треба вимовляти: кут. Значить замість того, щоб писати: кут A або кут BAD, пишуть так $< A$, або $< BAD$.

Коли дві прості лінії стрічаються так, як то показано на рисункові (Рис. 8), то вони творять два кути, а саме: $< CAB$ та $< DAB$. У того з них, що лежить ліворуч, то б то у $< CAB$, рамена розхилені більше, ніж у того, що лежить праворуч, то б то у $< DAB$; через те ми вважаємо, що $< CAB$ більший ніж $< DAB$.

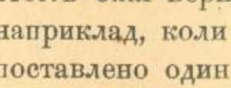


Рис. 8.

Коли проста лінія, стрічаючи другу, творить з нею такі два кути, що рамена у них розхилені однаково, як то показано на рисункові 9-му (Рис. 9), то б то такі два кути, які будуть пристайними чи то однаковими, то кожен з таких кутів звуть *прямим* кутом. Отже, як $\angle GEF$, так і $\angle HEF$ — прямі кути (Рис. 9). Коли у кута рамена розхилені менше ніж у прямого кута, то його звуть *гострим* кутом, а коли ті рамена розхилені більше ніж у прямого, тоді кут звуть *тупим*. Наприклад $< DAB$ (Рис. 8) — гострий, а $< CAB$ — тупий.

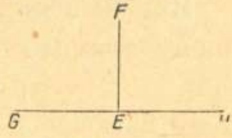


Рис. 9.

Коли дві прості лінії стрічаються або перетинаються одна з другою так, що творять два або чотирі (Рис. 10) прямих кута, то кажуть, що ті прості одна відносно другої *нормальні* або *простопадні* *). Значить, на рисункові 9-му FE простопадна простій GH і навпаки; так само на рисункові 10-му прості MN та KL простопадні проміж себе.

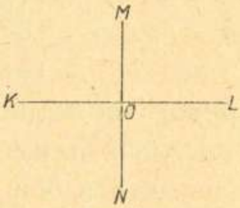


Рис. 10.

Як при рисуванні ґеометричних та всяких инших рисунків, так і при всякого роду майструванні дуже часто доводиться проводити прості лінії взаємно простопадні; инакше кажучи, доводиться рисувати прості лінії так, щоб вони були раменами одного, або двох, або чотирьох прямих кутів. Для того вживають прилад, що зветься *косинець*. Його, як і лінійку, роблять або з дерева, або з заліза, або ще з якого матеріалу. На рисункові одинадцятому (Рис. 11) уявлено косинці, які вжи-

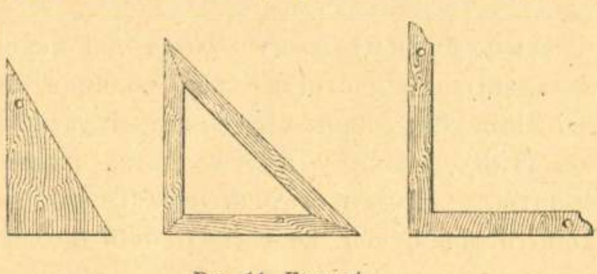


Рис. 11. Косинці.

*) В инших мовах вживають ще слово перпендікулярні за для означення простопадности простих ліній.

вають при рисуванню (два перших) та косинець, який вживають в столярстві.

Кожен з цих косинців, як можна бачити, має по одному прямому куту. Щоб за допомогою такого косинця через точку C (Рис. 12) на простій лінії AB провести другу просту, до першої простопадну, роблять так (Рис. 12): прикладають косинець одним з рамен прямого кута до простої AB так, щоб вершок прямого кута упав як-раз у точку C, потім олівцем або пером проводять вдовш другого рамена прямого кута косинця; проста лінія, яку ми таким чином накреслимо, і буде простопадною до простої AB, бо вона творитиме з нею прямі кути.

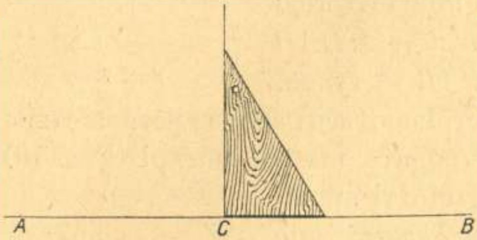


Рис. 12.

Задачі. Показати у хаті прямі кути, а як що є де-небудь, то й гострі та тупі кути.

Показати простопадні прості лінії.

Поставити або покласти олівець так, щоб він був простопадний до краю стола, або до краю листа паперу.

Двохстінні кути. Коли дві нерівнобіжні (непараллельні) площі стрічаються то вони, подібно до того як і лінії, теж творять кути, які звуться: *двохстінні кути* (або угли). Отже у бруса кожна пара сумежних стін творить такий двохстінний кут. Та проста лінія, по якій площі стрічаються, зветься рубом двохстінного кута, а самі площі — стінами його. Двохстінні кути, як і кути лінійні, можуть бути: прямі, гострі, коли стіни розхилені менше ніж у прямого, та тупі, коли стіни розхилені більше ніж у прямого. У нашого бруса усі двохстінні кути прямі. Так само двохстінні кути поміж стінами у хаті звичайно бувають прямі. Відчинивши двері у хаті більше або менше, можна зробити поміж дверима та стіною або тупий, або прямий, або гострий двохстінний кут.

Коли дві площі, стрічаючись, або перетинаючись творять прямі двохстінні кути, то про них кажуть, що вони одна до другої простопадні (або перпендікулярні). Значить, кожна пара сумежних стін бруса простопадні одна до другої. Стіни у хаті завжди бувають простопадні до підлоги та до стелі, вони звичайно простопадні і одна до другої. Двері відчинивши можна поставити простопадно до стіни, а до підлоги та до стелі вони завжди простопадні, чи вони зачинені, чи відчинені більше.

Задача. Скільки є стін простопадних до кожної з стін бруса та скільки рівнобіжних з кожною стіною бруса?

Діаґрамма або викройка бруса. Тепер уже можемо перейти до розгляду того, як зробити з картону взірець чи модель бруса. Для того візьмемо лінійку, косинець, мірочку поділену на сантіметри та ще шматок картону, обкраяний з чотирьох боків простими лініями так, щоб усі чотирі кути були прямі; значить, раніш ніж відкраяти собі той шматок картону, треба його обкреслити олівцем на тому картонові, від якого ми його маємо відкраяти, та гарненько при тому за допомогою косинця перевірити кути, щоб вони були прямі, а також і те, щоб його протилежні боки були подвоє рівнобіжними (це станеться само з себе, коли тільки усі чотирі кути будуть прямі). Цей шматок картону має бути: завдовшки (з ліва у право) 32 сантіметри та завширшки (з гори на низ) в 31 сантіметр. Рисунок 13-ий, що тут подаємо, показує той шматок картону з рисунком на ньому самої викройки бруса; усе це на цьому рисункові зменшено. Для того, щоб рисунок був виразнішим, ті шматки картону, які після будуть відкинуті, замальовано скісними лініями, а саму викройку бруса або діаґрамму зоставлено білою. Взявши такий шмат картону, одміряймо мірочкою від вершка його лівого горішного кута на горішньому його боці (значить одному з тих боків, що мають по 32 сантіметра) до точки *A* (Рис. 13) 6 сантіметрів; так само одміряймо 6 сантіметрів від вершка лівого нижнього кута та, поклавши потім лінійку рубом на точки *A* та *B*, проведімо просту лінію *AB*. Так само, одмірявши по 6 сантіметрів згори та знизу з правого боку, проведімо просту *CD*. Потім того, одмірявши від горішнього краю, від точок *A* та *C* по 1 сантіметру наниз по лініям, які ми перед тим провели, то б то по лініям *AB* та *CD*, проведімо лінію *EF*; одмірявши від цієї останньої лінії по 5 сантіметрів далі наниз, проведімо лінію *GH*; одмірявши від цієї лінії по 10 сантіметрів таки наниз зліва та зправа, проведімо лінію *KL*; одмірявши від цієї лінії наниз по 5 сантіметрів, проведімо лінію *MN*. Тепер ще одміряймо від лівого та правого боку нашого картону, а саме від точок *G* і *K* та *H* і *L* по одному сантіметру то проведімо лінії *PQ* та *RS*, і наша викройка або діаґрамма бруса майже готова. Вузенька смужка в 1 сантіметр, що ми матимемо між горішнім краєм картону та лінію *EF*, так само як і смужки від лівого краю до лінії *PQ* та від правого краю до лінії *RS* — то все ті смужки, які нам будуть потрібні, коли ми складатимемо цю викройку в модель бруса: коли ми цю модель склеюватимемо, то ми ці смужки намажемо клейом, а коли

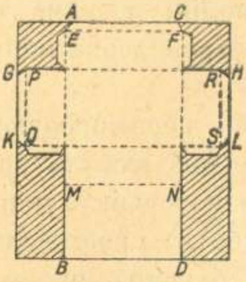


Рис. 13. Діаґрамма бруса. (В зменшеному вигляді.)

зшиватимемо тоненьким дротом або й ниткою, то саме до цих смужок ми пришиємо стінки бруса. Такі самі смужки ще треба зробити злівого та правого боку горішньої частини викройки та знизу лівої та правої її частини, як то можна бачити на рисункові. Коли тепер, узявши ножиці або ніж, ми обкраємо цей рисунок по тим лініям, які нарисовано тут (Рис. 13) неперивчастими лініями, та відкинемо геть ті шматки картону, які на рисункові замальовано сіткою скісних ліній, то те, що ми таким чином дістанемо і буде діаґрамма бруса. Легко зрозуміти, що вона є не що инше, як розплатаний брус (коли не брати на увагу ті вузенькі смужки, які зроблено тільки для того, щоб бруса можна було склеяти або зшити і яких після того вже нам невидно, бо їх закладать до середини). Щоб цю викройку зкласти у бруса, треба тільки перегнути її по тих лініях, які у нас зроблено (Рис. 13) приривчасто (пунктіром) в один бік та, заклавши смужки до середини, зклеяти або зшити модель. Коли картон дуже грубий, то, щоб краще було перегинати його по лініям, можна попереду надрізати його трохи по тим лініям гострим ножем; в такім разі перегинати треба буде так, щоб ті надрізи прийшлися не всередині моделі а докола її, — тоді модель вийде чепурненька.

Три виміри бруса. Поставимо тепер нашу модель бруса перед собою так, як її намальовано на рисункові 3-му *(сторінка 13)*. Віддалення або відступ лівої стіни від правої, яке міряється по одному з тих рубів, що йдуть від однієї до другої стіни, є *довжина* бруса, віддалення передньої стіни від задньої є його *ширина*, а віддалення горішньої стіни від спідньої або нижньої є його *вишина* (височина) або *грубина* (товщина). Значить, брус має три виміри. У нашої моделі бруса ці три виміри такі: довжина — 30 сантіметрів, ширина — 10 сантіметрів, а вишина або грубина — 5 сантіметрів.

Задача. Виміряйте довжину, вишину та ширину хати, у якій ви зараз. Коли є близько вас речі, які мають форму бруса, то зробіть те саме й з ними.

Чотирикутники. Ми вже бачили, що кожна стіна бруса має чотирі боки та чотирі кути. Ґеометричні замкнені фіґури, які обмежені з чотирьох боків чотирма простими лініями і через те мають чотирі кути, звуться: *чотирикутники.* Значить, кожна з стін бруса є чотирикутник. Та чотирикутник може мати не тільки таку форму, яку має кожна з стін бруса, а також і инші форми. Наприклад, на рисункові 14^{му} зліва ми маємо теж чотирикутник, та своєю формою він зовсім несхожий на котру-небудь з стін бруса. Щоб краще бачити ріжницю, подаємо на цьому ж таки рисункові поруч чотирикутник однієї з стін бруса.

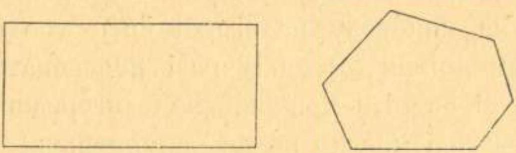


Рис. 14.

Порівняймо ці два чотирикутники (Рис. 14); будемо називати той, що зліва, першим чотирикутником, а той що зправа — другим. Отже, у першого усі чотирі боки неоднакові завдовшки, а у другого вони подвоє однакові; у першого ні одна пара боків між собою нерівнобіжні (непараллельні), а у другого протилежні боки рівнобіжні один з другим; потім того, у першого усі кути ріжні, то б то з ріжним розхилом рамен, а у другого вони усі однакові, бо усі чотирі — прямі кути. От такий чотирикутник, у якого боки подвоє однакові чи рівні, а кути усі — прямі, зветься *прямокутником.* Значить, кожна з стін бруса є прямокутник. Отже на питання: що таке чотирикутник? — одповідь може бути така: *чотирикутник це частина площі обмежена з чотирьох боків простими лініями.*

На питання: що таке прямокутник? — одповідь буде така: *прямокутник це такий чотирикутник, у якого усі чотирі кути прямі, а протилежні боки подвоє рівні проміж себе і рівнобіжні (параллельні).*

Задача. Знайти, де є навкруги прямокутники та перевірити, чи справді у них усе так, як те мусить бути у всякого прямокутника.

Як що є навкруги якісь инші чотирикутники, то зазначити, чому саме їх не можна взяти за прямокутники.

Такий чотирикутник, у якого не тільки, як у прямокутника, усі чотирі кути прямі, а ще до того усі чотирі боки рівні проміж себе, зветься: *квадрат* (Рис. 15). Коли у нас є прямокутник з паперу або з дерева, ми легко можемо з нього зробити квадрат. Для того треба тільки одміряти по двох боках довжини прямокутника від котрого-небудь краю, наприклад від точок A та B (Рис. 16) його ширину (AB) до точок E та F, потім провести просту лінію EF та по цій лінії відкраяти (або відпиляти) той шматок, який на рисункові 16-му замальовано сіткою скісних ліній: те, що останеться, і буде квадратом.

Рис. 15. Квадрат.

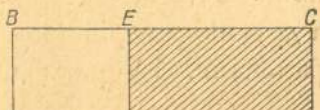


Рис. 16.

Чотирикутник, який має протилежні боки подвоє рівні та рівнобіжні, як і у простокутника, але у якого кути не прості, зветься: *рівнобіжник* або *параллельограмм.* Коли ж притому у нього усі чотирі боки рівні проміж себе то такий чотирикутник зветься: *ромб.* На рисункові

17-му нарисовано зліва рівнобіжник, а зправа ромб (Рис. 17). Як бачимо на цьому рисункові, як рівнобіжник, так і ромб мають по два кути гострих та по два тупих. Рівнобіжник ніби уявляє з себе перекошений прямокутник, а ромб — перекошений квадрат. Таким чином і прямокутник, і квадрат, і рівнобіжник, і ромб схожі між собою в тім, що у всіх них протилежні боки подвоє рівні та рівнобіжні, а ріжниця між рівнобіжником і прямокутником та між ромбом і квадратом є в тім, що у рівнобіжника та ромба кути не прямі, як у прямокутника та квадрата, а подвоє гострі та тупі. Зазначимо й те, що, як у рівнобіжника, так і у ромба обидва гострі кути мають рамена однаково розхилені; так само однаково розхилені рамена мають і обидва тупі кути, — значить, протилежні кути у рівнобіжника та у ромба подвоє пристайні, то б то однакові (Рис. 17).

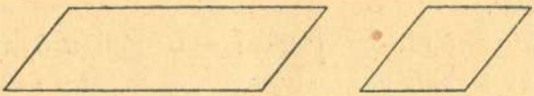


Рис. 17. Рівнобіжник. Ромб.

Коли у чотирикутника два боки рівнобіжні, а другі два нерівнобіжні, то такий чотирикутник зветься: *трапез* (Рис. 18). Один з рівнобіжних боків инколи звуть спідньою основою (звичайно довший з рівнобіжних боків), а другий — горішньою основою; нерівнобіжні боки звуть раменами. Наприклад, у трапеза, що на рисункові 18-му зліва, раменами будуть прості лінії *AB* та *CD*, а рівнобіжними боками або спідньою та горішньою основою — прості *AD* та *BC*. Коли у трапеза рамена однаково нахилені до рівнобіжних боків і через те рівні проміж себе, то тоді трапез звуть рівнораменним трапезом (Рис. 18 зправа).

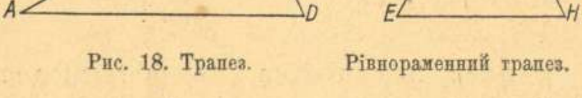


Рис. 18. Трапез. Рівнораменний трапез.

Чотирикутникові, у якого ні одна ні друга пара протилежних боків нерівнобіжні проміж себе, ми не даватимемо ніякої спеціальної назви, то б то зватимемо його просто чотирикутником (Рис. 14 зліва).

Задача. Як одрізати від одного краю прямокутника косинець, щоб приклавши його потім до другого краю, переробити прямокутник у рівнобіжник?

Як розрізати квадрат на чотирі однакових квадратів, рівнобіжник на чотирі однакових рівнобіжники, прямокутник на чотирі однакових прямокутники?

2. Куб.

Ґеометричне тіло, якого модель подано тут на рисункові (Рис. 15), дуже подібне до ґеометричного тіла, котре ми розглянули уже в попередньому розділі і котре ми звали брусом або параллелепіпедом. Справді, це нове ґеометричне тіло так само, як і брус, має шість стін, дванайцять рубів, та вісім вершків. З усіх стін на нашому рисункові нам видко передню, горішню та праву, а невидно задньої, лівої та спідньої. У цього тіла, як і у бруса, протилежні стіни одна з другою рівнобіжні, а ті, що стрічаються, творять прямі двохстінні кути, значить одна до другої простопадні (перпендікулярні). Отже, передня стіна з задньою, ліва з правою і горішня з спідньою

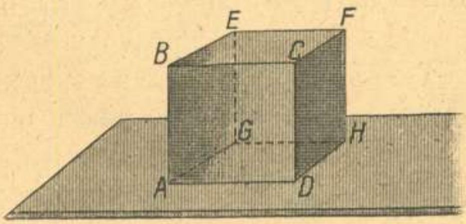


Рис. 15. Куб.

подвоє рівнобіжні; ліва, права, горішня та спідня простопадні до лівої та правої; ліва, права, передня та задня простопадні до горішньої та спідньої. Як і у бруса. кожна пара рубів, котрі між собою стрічаються, простопадні, бо творять прямі кути; чотирі руби, які стоять сторч, між собою рівнобіжні так само, як і чотирі тих, що ідуть вдовж або тих, що ідуть упоперек. Значить, усе тут так, як і у бруса, тому ми могли б це ґеометричне тіло вважати просто за брус. Та є в ньому де-що таке, шо трапляється не у всякого бруса, а саме: кожна з його шести стін є квадрат, то б то такий чотирикутник, у якого усі чотирі кути прямі і усі чотирі боки рівні. Тому це ґеометричне тіло має своє осібне назвище, воно зветься: *куб*. Легко бачити, що усі шість стін куба — пристайні проміж себе, то б то однакові, квадрати; це можна перевірити дуже просто: покладімо куб однією з його стін, значить одним з квадратів, на стіл або на лист паперу і обведімо по рубах той квадрат крейдою або олівцем; коли потім ми повертатимемо до того обводу куб почерзі усіми иншими стінами, то кожну з них ми зможемо покласти на стіл, або на лист паперу так, що її руби як раз лягатимуть на чотирі лінії того обводу.

Діаграмма куба. Щоб зробити з картону взірець або модель куба, треба спочатку нарисувати та вирізати діаграмму або викройку тієї моделі. Для того відкраємо шматок картону прямокутної форми (прямокутник) 41 сантіметр завдовжки та 32 сантіметри завширшки. (Рис. 16). Від горішнього лівого краю цього картону до точки A та від нижнього лівого до точки B відміряймо по 11 сантіметрів і проведімо просту лінію AB; так само, одмірявши від правих горішнього та нижнього країв по 11 сантіметрів, проведімо просту CD. Потім відмірявши від точок A та C по одному сантіметрові наниз проведімо просту лінію EF; відмірявши від цієї лінії наниз

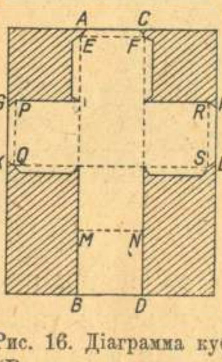


Рис. 16. Діаграмма куба. (В зменшеному вигляді.)

по лініям AB та CD три рази по 10 сантіметрів, проведімо лінії GH, KL та MN; від точок G та K управо, та від точок R та S уліво відміряймо по 1 сантіметр та проведімо лінії PQ та RS. Хрест, що вийде у нас, і буде діаграмма куба. Як ми бачимо на рисункові (Рис. 16), ця діаграмма складається з шости однакових то б то пристайних квадратів. Кожен бік кожного з квадратів має в собі 10 сантіметрів. Тепер треба буде тільки ще дорисувати запаси, то б то смужки в 1 сантіметр завширшки, які будуть нам потрібні для того, щоб зклеяти або зшити нашу модель; такі запаси показані на рисункові з трьох боків верхнього квадрату хреста та з двох боків лівого та правого квадратів. Тепер виріжмо цю діаґрамму ножицями або гострим ножем, відкинувши геть шматки, які на нашому рисункові (Рис. 16) замалювано сіткою скісних ліній, перегнімо діаграмму в один бік по лініях, які на рисункові зроблено перивчастими (пунктірними), зклеймо або зшиймо її підгорнувши запаси підспід — і модель куба готова.

Як ми бачимо діаґрамма куба буде подібна до діаґрамми бруса або параллелепіпеда, і то тому, що куб, як ми уже бачили, можна вважати і за брус.

Задачі. Скільки стін у куба рівнобіжних з котрою-небудь однією його стіною?

Скільки стін у куба простопадних з котрою-небудь однією його стіною?

Скільки рубів куба рівнобіжних з котрим-небудь одним його рубом? Скільки простопадних?

Обвід плоских замкнених фіґур. Уявіть, що нам треба обгородити навкруги леваду, яка має форму прямокутника. Раніш ніж обгорожувати, нам треба буде знати, скільки для того треба наготовити матеріалу, то б то кілків та хворосту, або дощок, або дроту; а для того нам треба буде обміряти ту леваду навкруги, то б то обміряти її довжину, потім ширину, потім ще раз довжину та ще раз ширину; та довжина, яку складуть разом усі ці чотирі виміри і буде довжина усієї огорожі круг левади або, як кажуть, довжина *обводу* її. Значить, обвід (або періметр) усякої замкненої фіґури то є та довжина, яку складають разом усі її боки; або довжина тієї простої лінії, яка утворилась би у нас, коли б ми усі боки тієї фіґури випростали в одну лінію. З цього виходить, що для того, щоб обміряти обвід якоїсь замкненої фіґури, треба обміряти довжину усіх її боків та ті числа, які показують довжину тих боків (у сантіметрах, чи в метрах, чи в аршинах), сполучити в одно число, — це останнє число і показуватиме довжину обводу фіґури в тих самих мірах, якими ми обмірювали її боки.

Задачі. Обміряйте обводи підлоги у хаті, дошки столу, вікна, дверей та инше.

---

3. Поле замкненої фіґури.

Поле прямокутника. Нарисуймо два прямокутники: один завдовжки 5 сантіметрів а завширшки 3 сантіметри, а другий завдовжки 3 сантіметри а завширшки 2 сантіметри (Рис. 17). Тепер поділимо у більшого прямо-

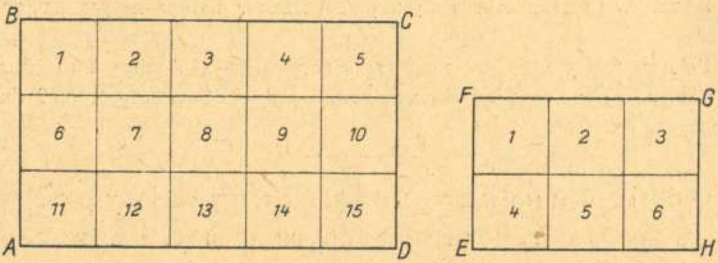


Рис. 17. Поле прямокутника.

кутника довжину на 5, а ширину на 3 рівних частин; у меншого прямокутника поділимо довжину на 3, а ширину на 2 рівних частин; таким чином і тут і там кожна з тих частин буде в один сантіметр завдовжки. Як у одного, так і у другого прямокутника через точки поділу проведімо прості лінії рівнобіжні з боками прямокутників, як то показано на нашому рисункові (Рис. 17); тоді кожен з наших прямокутників поділиться на кілька однакових квадратів; бік кожного з тих квадратів буде в 1 сантіметр. Коли ми перелічемо ті квадрати, то побачимо, що більший прямокутник має в собі тих квадратів 15, а менший має їх 6. Позаяк ті квадрати у більшого прямокутника такі самі завбільшки, як і у меншого, то ми можемо сказати, що у більшому прямокутникові міститься 15 таких квадратів, яких у меншому міститься 6. Або ще кажуть так: *поле* більшого прямокутника має в собі 15 таких квадратів, яких поле меншого має в собі 6. Уже одразу ми могли бачити, що поле одного прямокутника більше ніж другого, та ми могли те бачити тільки наоко, і тому не могли одразу сказати чи на багато поле одного прямокутника більше від поля другого. Коли ж ми поділили поля тих прямокутників на однакові квадрати та полічили ті квадрати, тоді вже ми змогли сказати, що поле більшого прямокутника на 9 квадратів більше ніж поле меншого. Ми можемо ще також сказати, що поле більшого в два з половиною рази більше ніж поле меншого. Значить, що ж нам треба було зробити з обома прямокутниками, щоб дізнатися точно, як саме поле одного з них більше поля другого? Нам треба було *обміряти поле* одного й другого прямокутника. Чим же ми обміряли ті поля? Ми обміряли їх однаковими квадратами. Кожен з чотирьох боків цього квадрата має в собі 1 сантіметр, через те ми звемо цей квадрат *квадратовим сантіметром* (скорочено пишуть так: кв. см.), щоб одріжнити від сантіметра *лінійного* (або просто сантіметра), яким ми міряємо тільки лінії. Коли б нам довелося обмірювати поле якогось великого прямокутника, як наприклад поле підлоги у хаті або поле прямокутного двору, або городу, то щоб було зручніше ми обмірювали б і більшим квадратом: *квадратовим метром* (скорочено: кв. м.), або *квадратовим аршином,* то б то таким квадратом, кожен бік котрого є один метр або один аршин. Для того нам було б треба довжину та ширину поділити вже не на сантіметри а на метри або на аршини, а для того треба було б обміряти, скільки та довжина та ширина має в собі лінійних метрів або аршин. Коли доводиться мати до діла з дуже великими полями, то їх визначають навіть в *квадратових кільометрах* (скорочено: кв. км.), або в *квадратових верстах.*

Тепер розміркуймо, чи для того, щоб знати, скільки квадратових сантіметрів має в собі на приклад більший з наших прямокутників (Рис. 17), треба було конче поділити його поле на ті квадрати, то б то, нарисувати усі оті прості лінії, що йдуть вдовж і впоперек? Чи не могли б ми як-небудь вирахувати, скільки буде тих квадратів в полі прямокутника, не рисуючи усіх тих ліній? Звичайно, ми можемо те зробити. Для того будемо міркувати так: коли, обмірявши ширину прямокутника то б то лінію *AB* (Рис. 17), ми найшли, що вона має в собі три сантіметри (лінійних), то і не рисуючи тих ліній, що йдуть вздовж, ми знаємо, що такими лініями поле прямокутника поділилось би на три смужки в один сантіметр завширшки та завдовжки в стільки сантіметрів, скільки їх має в собі довжина прямокутника. Так само, коли, обмірявши довжину прямокутника тоб то лінію *AD,* ми знаємо, що вона має в собі пять сантіметрів, то ми і не рисуючи тих ліній, що йдуть упоперек, знаємо, що такими лініями кожна з тих смуг, на які можна поділити поле прямокутника вздовжніми лініями, поділилась би на пять квадратів, з котрих кожен є квадратовий сантіметр. Отже, вздовжніми лініями поле прямокутника поділяється на стільки смужок в один сантіметр завширшки, скільки лінійних сантіметрів має в собі ширина прямокутника, то б то у нашого прямокутника на три; а кожна смужка поділяється поперечними лініями на стільки квадратових сантіметрів, скільки лінійних сантіметрів має в собі довжина прямокутника, то б то у нас на пять, — значить, поле нашого прямокутника має в собі стільки квадратових сантіметрів, скільки буде, коли ми візьмемо *три рази по пять*, то б то 15, ($5 \times 3 = 15$). Так само, поле меншого з наших прямокутників (Рис. 17) має в собі стільки квадратових сантіметрів, скільки буде, коли ми візьмемо два рази по три, то б то шість ($3 \times 2 = 6$), бо ширина його має в собі 2 лінійних сантіметри, а довжина — 3 лінійних сантіметрів. Виходить, що для того, *щоб вирахувати поле прямокутника, треба число, яке показує, скільки лінійних мір має в собі його довжина, намножити на число, яке показує, скільки таких мір має в собі його ширина, — число, яке таким чином дістанемо, покаже, скільки відповідних квадратових мір має в собі поле прямокутника.* Коли назвати число квадратових мір в полі прямокутника літерою (буквою) S, число відповідних лінійних мір в його довжині літерою a, а число таких самих мір в ширині літерою b, то це можна зазначити так:

$$S = a \times b.$$

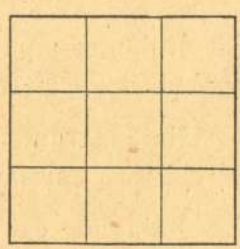


Рис. 18. Поле квадрата поділене на квадратові сантіметри.

Уявімо, що нам треба вирахувати поле прямокутного двору в 25 метрів довжини та 10 метрів ширини. Отже поле такого двору буде: $25 \times 10 = 250$ квадратових метрів.

Поле квадрата. Коли ми пригадаємо, що квадрат ми можемо брати за один з прямокутників, то легко догадаємось, що і поле квадрата треба обраховувати так само. А позаяк у квадрата довжина його та ширина однакові, то тут доводиться число, котре показує, скільки лінійних мір має в собі кожен з його боків намножати на самого себе. На рисункові 18^му показано, як поле квадрата з боками в 3 сантіметри поділяється на квадрати, з котрих кожен є квадратовий сантіметр. З цього рисунка ми бачимо, що поле квадрата вздовжними лініями поділяється саме на стільки смужок, на скільки квадратів поділяється кожна смужка поперечними лініями. Коли назвати число квадратових мір в полі квадрата літерою S, а число відповідних лінійних мір в його боці літерою a, то можна те, що ми сказали про поле квадрата, зазначити так:

$$S = a \times a \text{ або } S = a^2.$$

Так наприклад, поле квадрата, котрого бік має 20 метрів (лінійних), вирахуємо так: $20 \times 20 = 400$ квадратових метрів. Поле квадрата з боками в 5 аршин буде: $5 \times 5 = 25$ квадратових аршин. Зазначимо тут великість деяких квадратових мір.

Лінійний аршин має в собі 16 лінійних вершків, *квадратовий аршин має 16 × 16 = 256 квадратових вершків.*

Лінійна сажень має три лінійних аршини, *3 × 3 = 9 квадратових аршинів.*

Лінійний сантіметр має 10 лінійних мілліметрів, *квадратовий сантіметр має: 10 × 10 = 100 квадратових мілліметрів.*

Лінійний метр має 100 лінійних сантіметрів, *квадратовий метр має: 100 × 100 = 10000 квадратових сантіметрів.*

Лінійний кільометр має 1000 лінійних метрів, *квадратовий кільометр має: 1000 × 1000 = 1000000 квадратових метрів*.

Для обміру землі у нас вживають часом *десятину*. Десятина це 2400 квадратових сажнів, або, 21600 квадратових аршин. (2400 × 9). У Франції вживають міру, яка зветься *ар*, та яка має в собі 100 квадратових метрів, або *гектар*, тоб то 100 арів, значить 10000 квадратових метрів. Гектар небагато більше від нашої десятини.

Як ми бачили, для того, щоб обміряти поле прямокутника та квадрата, нам немає потреби брати якусь квадратову міру та нею обміряти те поле, рахуючи, скільки раз таку квадратову міру можна вмістити в полі; немає також потреби поділяти поле на квадрати завбільшки в якусь квадратову міру та рахувати потім ті квадрати. Ми бачимо, що ті обміри, які нам потрібні для того, щоб визначити поле прямокутника та квадрата, ми робимо просто лінійною мірою, бо, щоб обрахувати поле прямокутника, нам треба тільки знати число лінійних мір в його довжині та ширині, а щоб обрахувати поле квадрата, нам треба тільки знати число лінійних мір в його бокові. Як ми побачимо, і для инших фіґур ми можемо обраховувати поля, обмірюючи для того лінійною мірою ті або инші лінії тієї фіґури.

П о л е р і в н о б і ж н и к а. Розміркуємо тепер, як можна обрахувати поле рівнобіжника та які обміри в ньому треба для того зробити. Звернімось для того до рисунка 19-го, на якому нарисо-

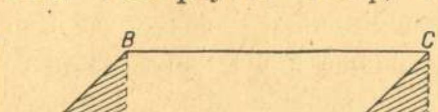


Рис. 19. Поле рівнобіжника.

вано рівнобіжник *ABCD* (Рис. 19). Щоб легше нам було зміркувати, як обрахувати його поле, положим, що ми вирізали такий самий рівнобіжник з паперу, так що ми можемо його краяти ножицями, як нам треба. Тепер проведімо з точки *B* просту *BE* простопадну до бока *AD* рівнобіжника (а значить і до бока *BC*) тай відкраймо по цій лінії *BE* від нашого рівнобіжника клин *ABE* (на нашому рисункові цей клин замальовано скісними лініями), а відкраявши прикладімо його з правого боку; тоді замісць рівнобіжника у нас буде прямокутник *EBCF*, якого поле, очевидячки, буде таке саме, як і поле нашого рівнобіжника. Значить, коли ми обрахуємо поле прямокутника, то тим самим ми знатимемо й поле нашого рівнобіжника. Для того ж, щоб обрахувати поле прямокутника *EBCF*, треба, як ми уже знаємо, обміряти його довжину *EF* (або *BC*) та його ширину *BE* (або *CF*) і число лінійних мір в тій довжині намножити на число таких самих лінійних мір в ширині, — те, що дістанемо в результаті того намноження, і буде число відповідних квадратових мір в полі прямокутника *EBCF*, а значить і в полі нашого рівнобіжника *ABCD*. Далі лінія *EF* є така сама завдовжки, як і лінія *BC* (горішня основа рівнобіжника), а значить як і лінія *AD* (нижня основа рівнобіжника). Значить, замісць того, щоб обмірювати для обрахунку поля лінію *EF* (нижню основу прямокутника), можна просто обміряти лінію *AD* (нижню основу рівнобіжника). А в такім разі для того, щоб обрахувати поле нашого рівнобіжника, немає потреби перекраювати його, то б то відкраювати від нього клин з лівого боку та прикладати його з правого боку, а треба тільки обміряти якоюсь лінійною мірою його нижню основу *AD* (або верхню *BC*) та ще лінію *BE* (Рис. 19). Ця лінія *BE* іде простопадно як до нижньої основи *AD*, так і до горішньої *BC*, бо ці дві основи рівнобіжні проміж себе; а віддалення однієї з рівнобіжних ліній до другої завжди міряють по лінії, простопадній до них обох; значить, лінія BE є та лінія, по якій треба міряти віддалення горішньої основи рівнобіжника від його нижньої основи. Така лінія зветься *висотою* рівнобіжника (можна її також звати і шириного його). Отже виходить, що *для того, щоб обрахувати поле рівнобіжника, треба число якихсь лінійних мір в його основі* (нижньої або горішньої, бо вони однакові) *намножити на число таких самих мір в його висоті, — число, яке від того дістанемо, і буде визначати поле рівнобіжника в квадратових мірах,* відповідних тим лінійним, якими ми міряли основу та високість рівнобіжника. Само собою розуміється, що так само треба обраховувати і поле ромба, бо ромб ми можемо завжди взяти за рівнобіжник. Значить, коли назвати число якихсь квадратових мір в полі рівнобіжника літерою S, число, відповідних лінійних мір в його основі — літерою a і число таких самих мір в його висоті літерою b, то можна написати, що: $S = a \times b$.

Як бачимо, спосіб обраховування поля рівнобіжника та ромба дуже нагадує спосіб, яким ми обраховували поле прямокутника, бо й там ми обмірювали для того довжину прямокутника, яку можна брати за його основу, та ширину його, яку можна брату за його висоту. Отже ми можемо однаково сказати, як відносно поля прямокутника, так і відносно поля рівнобіжника та ромба, що для того, щоб обрахувати їх поле в якихнебудь квадратових мірах, треба обміряти у них основу та висоту (або ширину) відповідною лінійною мірою, а добуті таким чином числа намножити одно на друге.

Поле трапеза. Тепер ще побачимо, як обміряти та обрахувати поле трапеза. На рисункові 20-му показано, як це можна зробити. Трапез $ABCD$ (Рис. 20), якого поле нам треба обрахувати, має своєю нижньою основою AD довжиною в 6 сантіметрів, горішньою основою BC довжиного в 4 сантіметри. Поділяємо лівий бік AB пополам у точці E, а правий бік CD — у точці F і сполучаємо ці дві точки простою лінією EF, яка зветься *середньою лінією* трапеза, — вона йде рівнобіжно з обома основами і на однаковому віддаленню від обох. Довжиною вона теж середня між обома основами, бо на стільки коротча від нижньої основи AD на AD, на скільки довша від горішньої основи BC (на HB). З аритметики нам відомо, що коли якесь число на стільки менше одного, наскільки воно більше другого, то воно рівне половині сумми тих двох чисел. *Наприклад число, яке на стільки менше 23, наскільки воно більше 7, буде:* $(23 + 7) : 2 = 30 : 2 = 15$. Значить, довжину середньої лінії трапеза EF обрахуємо, коли сполучимо числа якихсь лінійних мір в нижній та горішній основі в одно число и це число поділимо пополам. У нашого трапеза нижня основа має 6 сантіметрів, горішня — 4 сантіметри значить, середня лінія EF має: $(6 + 4) : 2 = 10 : 2 = 5$ сантіметрів. Як ми побачимо, ця середня лінія має значіння при обраховуванні поля трапеза. Проводимо тепер через середину бока AB, то б то через точку E просту лінію EG рівнобіжно з другим боком трапеза CB. Ця лінія відділить від трапеза клинок AEG, який на рисункові замальовано скісними лініями. Коли б ми відкраяли від нашого трапеза цей клинок та приточали його з лівого

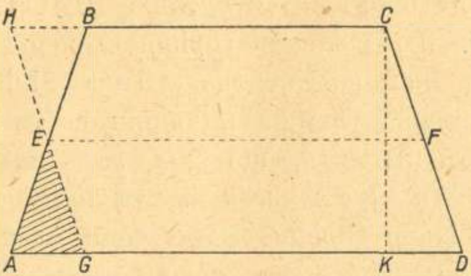


Рис. 20. Поле трапеза.

боку вгорі, в тім місці, де дорисовано переривчастими лініями клинок *HBE*, то замісць трапеза ми мали б рівнобіжник *GHCD*, з таким самим полем, як і наш трапез. Значить, коли обрахуємо поле цього рівнобіжника, то будемо знати й поле нашого трапеза; для того нам треба обміряти основу рівнобіжника, то б то лінію *GD*, та ще його вишину; щоб мати цю вишину, проводимо просту лінію, яка була б простопадною (перпендікулярною) до нижньої та горішньої основи. Такою вишиною на нашому рисункові є лінія *CK*. Основа рівнобіжника *GD* має ту саму довжину, що й середня лінія трапеза *EF*, то б то 5 сантіметрів, як ми уже знаємо; вишина рівнобіжника *CK* є також вишиного і нашого трапеза і має в собі 3 сантіметри. Значить, поле рівнобіжника, а разом з тим і поле нашого трапеза має в собі: $5 \times 3 = 15$ квадратових сантіметрів.

З усього, що було сказано про обраховування поля трапеза, можна бачити, що коли ми проведемо середню лінію трапеза *EF* (Рис. 20) та вишину його *CK*, то ми можемо обрахувати його поле, не перекраюючи його на рівнобіжник, бо для того нам треба тільки обміряти, як ми бачили, середню лінію трапеза та його вишину та перемножити ті числа, які визначають довжину тієї та другої. Та й провадити та обмірювати саму середню лінію нам немає потреби, бо ж ми уже знаєм, що її довжина є половина сумми чисел, які визначають в якихсь мірах нижню та верхню основу. З усого сказаного виходить, що *для того, щоб обрахувати поле трапеза, треба числа, які визначають в якихсь лінійних мірах нижню та горішню основи трапеза, сполучити в одно число, поділити це число пополам і те число, яке таким чином добудемо, намножити на число, як визначає в таких самих лінійних мірах вишину трапеза.* Значить, коли число лінійних мір в нижній основі трапеза назвемо *a*, число таких самих мір в горішній його основі — b, число таких самих лінійних мір в його вишині — h, а число відповідних квадратових мір в полі трапеза — S, то матимемо: $S = [(a + b) : 2] \times h$ або $S \frac{a+b}{2} \times h$. Так наприклад поле нашого трапеза коротко можна обрахувати так: сумма чисел сантіметрів в нижній основі = 6 сант. + 4 сант. = 10 сантіметрів. Половина цього числа (довжина середньої лінії) = 10 сант. : 2 = 5 сантіметрів. Позаяк вишина трапеза є 3 сантіметри, то поле трапеза буде: 5 × 3 = 15 квадратових сантіметрів. Можна все це написати ще коротше так: поле трапеза = [(6 + 4) : 2] × 3 = (10 : 2) × 3 = 15 квадратових сантіметрів.

4. Поле поверхні тіл.

Так само, як обмірювали ми поля прямокутників, ми можемо обміряти поле кожної стіни бруса. Часом буває потрібно знати, яке вийде поле, коли сполучити в одно поля усіх стін бруса, — це буде поле усієї *поверхні* бруса, бо усі стіни бруса заразом звуться його поверхнею. Коли беруть на увагу тільки бічні стіни бруса, значить, не беручи ні горішньої ні спідньої основи, тоді це буде поле *бічної поверхні*. Часом усю поверхню бруса звуть *повною поверхнею,* щоб відріжнити її від бічної.

Розміркуємо спочатку, як обміряти та вирахувати бічну поверхню бруса. Для того звернімося до тієї моделі бруса з кардону (Рис. 3, сторінка 13), про яку було говорено раніш. Відкраймо від цієї моделі горішню та спідню основу, зоставивши таким чином тільки бічні стіни, розріжмо ще те, що зосталось, по одному з рубів, наприклад, по рубові AB (Рис. 3) та розплатаймо на столі. Розплатані таким чином чотирі бічних стін утворять один прямокутник, поле якого і буде полем бічної поверхні бруса (Рис. 21). Щоб обрахувати те поле, треба обміряти довжину його, то б то лінію AA_1 та ширину, то б то лінію AB, та число лінійних мір першої лінії намножити на число таких самих мір другої лінії, —

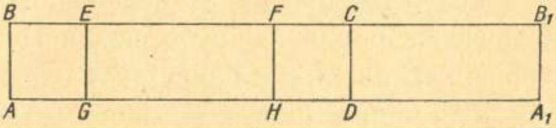


Рис. 21. Розплатана бічня поверхня бруса.

те, що дістанемо, і буде число відповідних квадратових мір поля бічньої поверхні бруса. Тепер зауважимо, що лінія AA_1 є не що инше, як обвід (периметр) основи бруса, а лінія AB — його вишина; тому можна сказати так: щоб знайти число квадратових мір поля бічної поверхні бруса, треба число відповідних лінійних мір обводу його основи (спідньої або горішньої) намножити на число таких самих мір його вишини. Коротше це висловлюють так: *поле бічньої поверхні бруса* (або просто: бічна поверхня бруса) *є добуток від множення обводу його основи на вишину.* Тут само собою розуміється, що для того той обвід та вишина повинні бути обміряні однаковою лінійною мірою, та що добуток визначатиме поле поверхні в квадратових мірах, відповідних тим лінійним мірам. То б то, коли, наприклад, ми мірятимемо обвід сантіметрами, то й вишину треба міряти сантіметрами, а тоді добуток від множення числа сантіметрів обводу на число сантіметрів вишин визначатиме поле бічньої поверхні бруса теж в квадратових сантіметрах. Обрахуймо тут для прикладу бічню поверхню того бруса, про модель якого та діаграмму було говорено на сторінках 27 та 28 (Рис. 13). Його довжина та ширина є довжина та ширина його основи. Та довжина є 30 сантіметрів, а ширина 10 сантіметрів; значить обвід його основи є:

$$30с. \times 2 + 10с. \times 2 = 60с. + 20с. = 80 \text{ сантіметрів.}$$

Позаяк вишина цього бруса є 5 сантіметрів, то поле його бічної поверхні буде:

$$80 \times 5 = 400 \text{ квадратових сантіметрів.}$$

Тепер ще про повну поверхню бруса. Ця поверхня більша від бічної на поля двох його основ, спідньої та горішньої, які між собою цілком однакові; значить, коли до поля бічної поверхні бруса додати сполучені між собою два поля спідньої та горішньої основи (або поле однієї основи, взяте два рази), то й матимемо поле повної поверхні (або просто поверхні) бруса. Позаяк поле кожної з основ нашого бруса є: $30 \times 10 = 300$ кв. сант., значить, поле двох основ: $300 \times 2 = 600$ кв. сант., то повна поверхня бруса буде:

$$400 \text{ кв. сант.} + 600 \text{ кв. сант.} = 1000 \text{ кв. сантіметр.}$$

Ще легше обрахувати поле повної та бічної поверхонь куба. Позаяк усі шість стін куба однакові квадрати, досить обрахувати поле однієї стінки, та взяти його для повної поверхні шість раз, а для бічної чотирі рази. Положим наприклад, що нам треба обрахувати поле повної та бічної поверхні куба, котрого кожен руб має 12 сантіметрів. Позаяк кожна з стін цього куба є квадрат з боком в 12 сантіметрів, поле її буде $12 \times 12 = 144$ кв. сант. Значить поле повної поверхні буде: 144 кв. сант. $\times 6 = 864$ кв. сантіметрів: поле бічної поверхні буде: 144 кв. сант. $\times 4 = 576$ кв. сантіметрів.

Так само, як брус та куб, і всяке тіло має свою поверхню, а та поверхня має своє поле. Далі ми побачимо, як обмірювати та обраховувати поле поверхонь для всяких тіл. А тепер ще наведемо тут приклади тих задач на обрахування піль простокутників та поверхонь бруса та куба, які можуть нам траплятися не тілько при вивченню ґеометрії, але й в звичайнім житті.

Задачі на обрахунок.

1. Скільки треба сухої фарби, щоб пофарбувати підлогу прямокутної кімнати 20 арш. завдовшки та 12 арш. завширшки, коли 1 фунт тієї фарби вистачає на пофарбування 15 квадратових аршин? (Відповідь: 16 фунтів.)

2. Скільки пудів насіння потрібно для того, щоб засіяти ниву, яка має форму прямокутника 200 сажнів завдовжки та 60 сажнів завширшки, коли засівати по 10 пудів на десятині (десятина має в собі 2400 квадратових сажнів)? (Відповідь: 50 пудів.)

3. Треба обити бляхою деревяну скриню, яка має форму бруса 2 аршини завдовжки, 1 аршин завширшки та 1 аршин заввишки. Скільки фунтів бляхи потрібно для того, коли відомо, що 1 кв. арш. її важить 5 фунт. (Відповідь: 50 фунт., або 1 пуд 10 фунт.)

4. Бассейн, який має форму бруса (параллелепіпеда) 5 метрів завдовжки, 3 метри завширшки та 2 метри глибини, треба обцементувати (чотирі боки та дно). Скільки фунтів цементу потрібно для того, коли відомо, що на кожний квадратовий метр поверхні бассейна потрібно 3 кільоґрамми цементу? (Відповідь: 141 кільоґрамм.)

---

5. Обєм тіл.

Придивляючись до тих тіл, які ми бачимо навколо себе, ми зауважимо, що одні з них займають собою більше просторони, а другі менше, та що, яке б маленьке тіло не було, воно все ж таки займає якусь частину просторони. *Та частина просторони, яку займає собою якесь тіло, звуть* обємом *того тіла.* Про більше тіло ми кажемо, що його обєм більший, а про менше, що його обєм менший Часто доводиться обмірювати обєми всяких тіл. Перш ніж говорити про те, як то робиться, запитаємо самих себе: чим можна обмірювати обєми тіл? Для того пригадаймо, чим ми обмірювали лінії та поля всяких площ та поверхонь. Одже лінії ми завжди обмірювали таки лініями, довшими або коротчими, які ми звали лінійними мірами, як от, наприклад, лінійний метр, лінійний сантіметр, лінійний аршин та инші. Поля ми вже міряли таки полем, то б то полем більшого або меншого квадрата; такі квадрати ми звали квадратовими мірами, як от, наприклад, квадратовий метр, квадратовий сантіметр, квадратовий аршин та инші. Отже, коли лінії треба міряти таки лініями ж (лінійними мірами), поля — таки полями ж (полем квадрата або квадратовими мірами), то й обєми тіл очевидячки треба міряти таки обємами ж. Як за мірку для піль завжди беруть той або инший квадрат, як найзручнішу для того форму, так і *за мірку для обємів завжди беруть куб*, більший або менший, дивлячись на те, обєм якого тіла, великого чи малого, нам треба обмірювати. Як міри для ліній ми звали лінійними, а міри для піль — квадратовими, так міри для обємів тіл ми мусимо звати кубними мірами; так само як істнують лінійний та квадратовий сантіметр, лінійний та квадратовий аршин та инші, істнують: кубний метр, кубний сантіметр, кубний аршин, кубна сажень та инші. Кубний метр то такий куб, у котрого кожен з рубів є лінійний метр, а значить, кожна з стін — квадратовий метр; кубний аршин то такий куб, у котрого кожен з рубів є лінійний аршин, а значить кожна з стін — квадратовий аршин і так далі.

Обміряти або обрахувати обєм якогось тіла, значить, дізнатися, скільки треба взяти якихсь кубічних мір (кубічних метрів або кубічних аршин або ще яких инших), щоб, коли їх сполучити в одно, вони утворили такий самий обєм, який має те тіло, яке ми обмірюємо. Або ще кажуть так: обміряти або обрахувати обєм якогось тіла, значить, дізнатися, скільки кубічних мір може поміститися в тій частині просторові, яку займає це тіло.

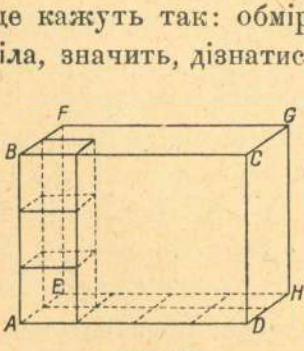


Рис. 22.

Обєм бруса. Тепер розміркуємо, як обміряти обєм бруса. На рисункові 22-му (Рис. 22) нарисовано брус так, ніби він прозорий, то б то такий, що його стіни та руби видко наскрізь. Цей брус має: довжину 4 сантіметри, ширину 2 сантіметри та вишину 3 сантіметри. Поділимо спідню основу бруса на квадрати завбільшки кожний в квадратовий сантіметр, як ми уже робили те, коли обміряли поле прямокутника (Рис. 17, стор. 37). Позаяк довжина основи — 4 сантіметри а ширина 2 сантіметри, уся основа поділиться на 8 квадратів (4×2). На кожен з тих квадратів основи можна поставити по одному кубикові завбільшки в кубний сантіметр, бо кожна з стін такого кубика як-раз буде квадратовий сантіметр. Значить, на цілій основі бруса стане таких кубиків 8. На кожен з тих кубиків можна поставити ще по одному такому самому кубикові, то б то ще 8 кубних сантіметрів, а на кожен з цих останніх ще по одному то б то ще 8, бо вишина нашого бруса є 3 сантіметри. На нашому рисункові ті поставлені один на одному кубики намальовано тільки в лівому передньому куті бруса (Рис. 22). Значить всього кубних сантіметрів в обємі нашого бруса може поміститися стільки, скільки ми достанемо, коли число квадратових сантіметрів в основі бруса (у нас 8) намножимо на число лінійних сантіметрів в його вишині (у нас 3). То б то обєм нашого бруса буде: $8 \times 3 = 24$ кубних сантіметрів. З того виходить, що *для того, щоб обрахувати обєм бруса в якихсь кубних мірах, треба число, яке визначає поле його основи в відповідних квадратових мірах, намножити на число, яке визначає його висоту в відповідних лінійних мірах.*

Коли ми назовемо число кубних мір у обємі бруса літерою V, число відповідних квадратових мір у полі його основи — літерою S, а число відповідних лінійних мір у його вишині — літерою h, то можемо зазначити те, що ми зараз сказали, так: $V = S \times h$.

Зауважимо тут, що брус ми можемо поставити якою захочемо стіною наниз, і тоді ту стіну ми беремо за спідню основу бруса. Та обрахунок обєма бруса не міняється від того, котру з стін його ми берем за основу. Справді, звернімось знов до того бруса (Рис. 22), якого обєм ми оце обраховували. Коли б у цього бруса взяти за основу його стіну *ABFE*, то на цій основі можна поставити 6 кубиків, завбільшки в 1 кубний сантіметр кожний, бо поле цієї стіни має в собі 6 квадратових сантіметрів (3×2); до цих 6 кубиків можна приставити ще 3 рази по 6 кубиків, бо ж довжина (або тепер уже вишина) бруса має всього 4 сантіметри. Значить, всього кубних сантіметрів в обємі бруса буде 4 рази по 6, то б то $6 \times 4 = 24$, — те, що ми нарахували й раніш, коли за основу брали стіну *AEHD*. І знов таки виходить, що для обрахунку обєма ми число квадратових мір в основі його намножаємо на число лінійних мір в його вишині, яку б стіну бруса при тому ми не брали за його основу.

Обєм куба. Так само обраховують і обєм куба; тільки позаяк ширина і довжина основи куба, та його вишини однакові, то б то мають в собі одне і те саме число лінійних мір, то, обраховуючи поле основи, доводиться множити те число на самого себе, а обраховуючи обєм те, що дістанеться по тому множенню, множити ще раз на те саме число. Таким чином виходить, що для того, щоб обрахувати обєм куба в якихсь кубних мірах треба число, яке визначає його руб в відповідних лінійних мірах, двічі намножити само на себе. Значить, коли назовем число кубних мір у обємі куба літерою V, а число відповідних лінійних мір в його рубові літерою a, то можемо написати:

$$V = a \times a \times a, \text{ або } V = a^3.$$

Хай нам треба обрахувати обєм куба, якого руб має 5 сантіметрів. Обєм його буде: $5 \times 5 \times 5 = 25$ кубних сантіметрів.

Для більших обємів вживають і більші кубні міри, як от наприклад кубний метр, кубний аршин, кубну сажень; а для менших — менші кубні міри, як от, наприклад, кубний сантіметр, кубний вершок і так далі.

Позаяк лінійна сажень має 3 лінійних аршин, *кубна сажень має: $3 \times 3 \times 3 = 27$ кубних аршинів.*

Позаяк лінійний аршин має 16 лінійних вершків, *кубний аршин має: $16 \times 16 \times 16 = 4096$ кубних вершків.*

Позаяк лінійний сантіметр має 10 лінійних мілліметрів, *кубний сантіметр має: $10 \times 10 \times 10 = 1000$ кубних мілліметрів.*

Позаяк лінійний метр має 100 лінійних сантіметрів, *кубний метр має: $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ кубних сантіметрів.*

Всяке тіло, яке б маленьке воно не було і яку б форму воно не мало, має свій обєм. Як обміряти та обраховувати обєми ріжних инших тіл, про те ми побалакаємо далі, а тепер звернемося до задач, в яких ми матимемо до діла з обємами бруса та куба.

Скажемо тут доречі де-що про ті міри ваги, які, за прикладом Франції, вживаються тепер по де-яких державах, а часом і у нас. Основною мірою ваги в цій Французській сістемі мір є *ґрамм.* Ґрамм є вага кубного сантіметра чистої (дістільованої) води. Сота частина ґрамма зветься: *сантіґрамм,* а тисячна частина ґрамма — *мілліґрамм.* Тисяча ґраммів творять більшу міру ваги, що зветься: *кільоґрамм.* Кільоґрамм важить біля півтретя (біля двох з половиною) наших фунтів, 100 кільограммів творять тонну, яка важить біля 61 пуда.

Задачі на обрахунок.

5. Щоб обрахувати вагу каміня, який має форму куба з рубами в 75 сантіметрів, взяли шматочок такого самого камня і, порівнявши його вагу з вагою

води, знайшли, що камінь в пятеро важче води. Скільки кільоґраммів та ґраммів важить той камінь? (Увага: 1 кубний сантіметр води важить 1 ґрамм). (Відповідь: 2109375 ґраммів або 2109 кільоґраммів 375 ґраммів).

6. Скільки кільоґраммів важить вода, налита до вишини 2 метрів у бак, який має форму бруса 3 метри завдовжки та 1 метр завширшки? (Увага: позаяк 1 кубний сантіметр води важить 1 ґрамм, а 1 кубний метр має в собі 1000000 кубних сантіметрів (100×100×100), то 1 кубний метр води важить 1000000 ґраммів, або 1000 кільоґраммів) (Відповідь: 6000 кільоґраммів).

7. До якої вишини наповниться ся бассейн, який має форму бруса 2 арш. завдовжки та 1 арш. завширшки, коли в нього налить 100 відер води. Нам відомо, що 25 відер творять 1 кубний аршин води. (Відповідь: До вишини 2 арш.)

8. Скільки важить деревянний брус 5 арш. довжини, 4 вершка шириною та 6 вершків товщини, коли 1 кубний вершок того дерева важить $^1/_5$ фунта? (то б то 5 кубних вершків важуть 1 фунт) (Відповідь: 384 фунта або 9 пуд, 24 ф.)

6. Призма.

Візьмімо деревянний брус в 25 сантіметрів шириною, у котрого спідня та горішня основи були б прямокутники 12 сантіметрів довжини та 9 сантіметрів ширини. Такий брус в зменшеному вигляді нарисовано тут на рисункові 23-му. Дві бічні стіни його (передню та праву) та горішню основу нам видко, а двох бічних стін (лівої та задньої) та спідньої основи невидно, і через те їх означено на рисункові переривчастими лініями.

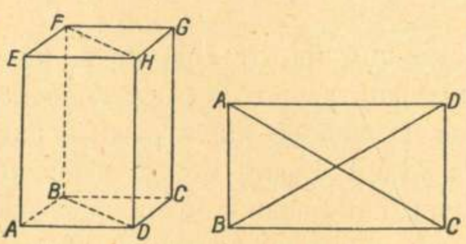


Рис. 23. Прямокутник; косинами (діаґоналями).

Проведімо тепер крейдою або олівцем прості лінії на обох основах бруса: на верхній — від вершка кута F до вершка кута H, значить лінію FH, а на спідній — від вершка кута B до вершка кута D, значить лінію BD. Такі лінії у чотирикутників звуться *косинами* або *діаґоналями*. (На рисункові 23-му праворуч нарисовано окремо прямокутник з обома діаґоналями або косинами: AC та BD).

Значить лінія *FH* буде косиною або діаґоналею верхньої основи, а *BD* — косиною нижньої основи. Коли б тепер ми могли розпиляти нашого бруса, починаючи пиляти згори по косині *FH*, так, щоб не збочуючи пилкою кінчини пиляти по косині *BD*, то ми розпиляли б його на дві половини, з котрих кожна була б новим ґеометричним тілом. Розгляньмо уважненько це тіло. Для того на рисункові 24-му подаємо тут малюнок однієї половини (правої) розпиляного бруса, яка й є це нове тіло. Зветься це ґеометричне тіло: **призма**. Як бачимо на цьому рисункові (Рис. 24), ця призма має три бічних стіни, з котрих кожна є прямокутник, та дві цілком однакові основи: горішню *FGH* та спідню *BCD*. На рисункові 25-му (Рис. 25), де нарисовано окремо основу призми (в зменшеному вигляді), бачимо, що це є замкнена ґеометрична фіґура, обмежена трьома простими лініями, які ми зватимемо, як і раніш, її боками. Значить, ця фіґура має три боки а також і три кути, через те вона й зветься *трикутник*. Тому, що наша призма має за основу трикутники, вона має і три бічні стіни, значить вона є *трьохстінна призма*. Зауважимо ще, що обидві основи призми суть пристайні, то б то однакові трикутники, котрих площі рівнобіжні одна відносно другої. Площі бічних стін — простопадні до обох основ. Усі бічні руби, яких є три, рівнобіжні поміж собою, а руби горішньої та спідньої основ — рівнобіжні подвоє: кожен горішній руб рівнобіжний з відповідним йому спіднім. Кожен з бічних рубів простопадний до тих рубів основ, з якими він стрічається.

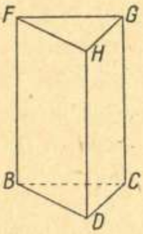


Рис. 24. Трьохстінна призма.

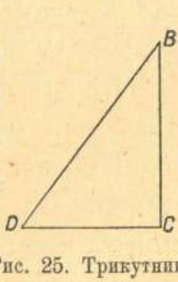


Рис. 25. Трикутник.

Діаґрамма трьохстінної призми. Звернімось тепер до моделі трьохстінної призми. Для того спершу треба нарисувати та викраяти діаґрамму її. (Рис. 26). Відкраймо шматок картону у формі прямокутника 37 сантіметрів завдовжки (з ліва на право) та 43 сантіметри завширшки (з низу до гори). Раніш ніж його відкраювати, слід обкрислити його олівцем під лінійку, гарненько перевіряючи, щоб кути були прямі та краї подвоє рівнобіжні та подвоє рівні один одному. Тепер від вершків горішніх та нижніх кутів шматка картону відміряймо по лівому та по правому боках по 9 сантіметрів, зліва до точок *A* та *B* (Рис. 26), а з права до точок *C* та *D* і проведімо прості лінії *BC* та *AD*. По тій і по другій, починаючи з лівого краю, відкладімо 15 сантіметрів (до точки *F* нагорі та до точки *E* нанизу), 12 сантіметрів (до точки *L* нагорі та до точки *K* нанизу) і 9 сантіметрів (до точки *N* нагорі та до точки *M* нанизу) і проведімо прості лінії *FE*, *HG* та *NM*; смужка в 1 сантіметр, яка лишиться від лінії *NM* до правого краю, знадобиться нам для того, щоб зклеювати модель. Тепер ще треба сполучити точки *H* та *F* та ще точки *G* та *E*, і діаґрамма готова; прямокутники *ABFE*, *EFLK* та *KLNM* будуть бічними стінами, а трикутники *FHL* та *EKG* горішньою та спідньою основами. На цих трикутниках теж показані смужки для зклеювання моделі. Тепер остається тільки викраяти діаґрамму, відкинувши геть ті шматки картону, які замалювано на рисункові (Рис. 26) скісними лініями, перегнути діаґрамму в один бік по тим лініям, які нарисовано переривчасто та зклеяти або зпити модель.

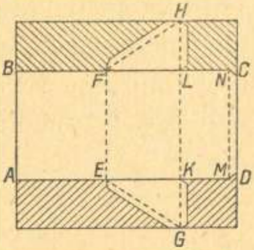


Рис. 26. Діаґрамма трьохстінної призми. (В зменш. вигл.)

Бічна та повна поверхні трьохстінної призми. На рисункові діаґрамми трьохстінної призми (Рис. 26) можна бачити, що поле бічньої поверхні, яка складається з поверхонь трьох бічних стін, є поле прямокутника; основа його (або довжина) *AM* складається з трьох частин *AE*, *EK* та *KM*, котрі по довжині однакові з трьома боками трикутника *EKG*, то б то основи призми; значить, основа прямокутника є не що инше, як обвід основи призми; ширина ж прямокутника *AB* є вишина призми. Позаяк для обрахунку поля цього простокутника, як і всякого иншого, треба намножити число лінійних мір в його основі (довжині) на число таких самих лінійних мір в його ширині, то значить *для обрахунку бічної поверхні трьохстінної призми в якихсь квадратових мірах, треба число відповідних лінійних мір в обводі її основи помножити на число таких самих лінійних мір в її вишині.* Наприклад, для тієї моделі трьохстінної призми, про діаґрамми котрої ми говорили, поле бічньої поверхні обрахуємо так: позаяк боки трикутників, які являються горішньою та нижньою основою для призми, мають: одна — 9 сантіметрів, друга 12 сантіметрів, а третя — 15 сантіметрів, то обвід кожного з тих трикутників має в собі 9 сант. + 12 сант. + 15 сант. = 36 сантіметрів. Позаяк вишина призми має 25 сантіметрів, то поле бічної поверхні нашої призми буде: $36 \times 25 = 900$ квадратових сантіметрів. Як бачимо, спосіб обраховування бічної поверхні трьохстінної призми той самий, що й для обраховування бічної поверхні бруса, а то тому, що брус можна теж брати за призму, як ми то побачимо далі.

Тепер, щоб обрахувати поле повної поверхні трьохстінної призми, треба до поля її бічної поверхні додати поля горішньої та спідньої основи, або, позаяк ті обидва поля однакові, додати поле одного з тих трикутників взяте двічі. Далі ми будемо говорити про спосіб, яким треба обраховувати поле трикутника.

Обем трьохстінної призми. Як ми бачили, трьохстінна призма, про яку у нас була мова (Рис. 25, сторінка 50), є половина бруса; значить і обем її є половина обема бруса. Але для обрахунку обему бруса треба число квадратових мір в його основі $ABCD$ (Рис. 23) намножити на число відповідних лінійних мір в його висоті; значить, для того, щоб вийшла половина обема, треба намножити на число лінійних мір в його висоті число квадратових мір не в цілій основі, а в половині її; та позаяк половина обема бруса є обем нашої призми, а половина основи бруса є основа призми, то значить, *для обрахунку обему нашої призми треба число квадратових мір в її основі намножити на число відповідних лінійних мір в її вишині.* Коли число кубних мір в обемі призми назвемо V, число відповідних квадратових мір в полі її основ — S, а число відповідних лінійних мір в вишині призми H, то матимемо: $V = S \times H$. І тут знов, як бачимо, ми вживаємо той самий спосіб, що й для бруса.

Для прикладу обрахуємо обем нашої трьохстінної призми, для якої ми вже обраховували бічню поверхню. Позаяк довжина основи бруса, половиною якого є наша призма, є 12 сантіметрів, а ширина — 9 сантіметрів, поле цілої основи бруса буде: $12 \times 9 = 108$ кв. сантіметрів, а пів поля, тобто поле основи призми, буде половина 108 квадр. сантіметрів, то б то 54 квадратових сантіметрів ($108 : 2 = 54$). Вишинаж призми (як і бруса) 25 сантіметрів; значить, обем призми буде: $54 \times 25 = 1350$ кубних сантіметрів.

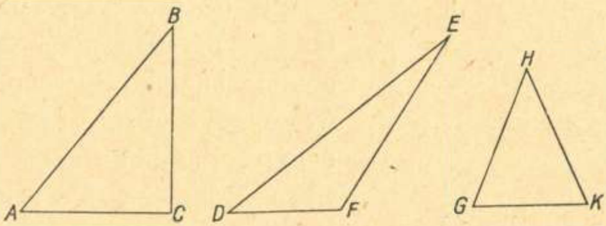
7. Трикутники.

Ми бачили вже, що трьохстінна призма має своїми основами *трикутники*, то б то такі замкнені простолінійні фіґури, котрі мають три боки та три кути. Поговоримо тепер докладніше про трикутники.

Зазначимо найперше, що простолінійна замкнена фіґура не може мати менше трьох боків, бо двома простими ніяк не можна обмежити частини площі з усіх боків.

Як і чотирикутники, трикутники можуть бути ріжні що до їх форми. Коли два боки трикутника простопадні один до другого, то б то коли трикутник має один кут прямий, то такий трикутник звуть *прямокутним* трикутником, а всякі инші звуть *скосокутними.* Коли скосокутний трикутник має один тупий кут, то його звуть *тупокутним*, а коли у нього усі три кути гострі, то — *гострокутним.* На рисункові $27^{\text{му}}$ показано прямокутний, тупокутний та гострокутний трикутники (Рис. 27).

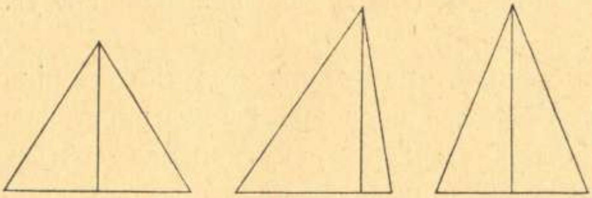
У прямокутного трикутника його боки мають осібні назвища, а саме: ті два боки, які між собою простопадні то б то які творять прямий кут (на рисункові $27^{\text{му}}$ боки: AC та BC), звуться: *катети* або *прямки*; той бік, який лежить проти прямого кута, зветься: *гіпотенуза* або *протипрямка.* У моделі нашої трьохстінної призми кожна з основ і є прямокутний трикутник, що добре можна бачити на рисункові її діаґрамму (Рис. 25, сторінка 57).



Прямокутний трикутник. Тупокутний трикутник. Гострокутний трикутник.

Рис. 27.

У трикутника можуть бути однаковими завдовжки або рівними усі три боки, — тоді такий трикутник зветься: *рівнобічний;* коли у нього усі три боки ріжні довжиною, то він зветься: *ріжнобічний;* коли ж у нього два боки рівні, тоді він зветься: *рівнораменний*; ті боки, які у нього рівні звуться *раменами* його, а третій його основою. На рисункові 28му нарисовано усі три трикутники (Рис. 28). У кожного з цих трикутників проведено просту лінію з вершка горішнього кута простопадно (перпендікулярно) до основи. Така лінія зветься *вишиною* трикутника.



Рівнобічний трикутник. Ріжнокутний трикутник. Рівнораменний трикутник.

Рис. 28.

Таку лінію можна провести з вершка кожного з трьох кутів, тому у кожного трикутника можна провести три вишини. У прямокутного трикутника дві з трьох вишин суть його два катети (прямки).

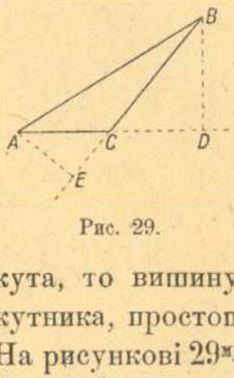


Рис. 29.

За основу трикутника можна брати кожен з його трьох боків; кожній з основ відповідає й своя вишина, якою буде простопад (перпендікуляр) на основу з вершка протилежного основі кута. Коли у тупокутного трикутника брати за основу один з боків тупого кута, то вишину доведеться проводити за межами трикутника, простопадно не самій основі а її продовженню. На рисункові 29му нарисовано тупокутний трикутник ABC (Рис. 29). Коли за основу взяти бік AC, то вишиною трикутника буде лінія BD, а коли бік BC, то вишина буде лінія AE. Це треба мати на увазі при обмірюванню та обрахункові піль тупокутних трикутників. Довжина, яку дістанемо, сполучивши в одно усі три боки трикутника, буде довжиною його обводу або періметра.

П о л е   т р и к у т н и к а. Всякий трикутник, який би малий він не був, вміщає якусь частину площі, значить має своє поле. Тепер розміркуймо, як можна обміряти або обрахувати те поле. Для того звернімося до рисунка 30го, де нарисовано трикутник ABC, у якого основа AC має 4 сантіметри, а вишина BD — 2 сантіметри довжини (Рис. 30). Тепер з правого боку дорисуймо до нього ще трикутник BEC, який був би зовсім однаковий з нашим трикутником, тільки обернений вершком наниз; на рисункові цей трикутник дорисовано перерывчастими лініями; для того треба тільки провести з точки B просту лінію BE рівнобіжну з основою AC, а з точки C лінію CE рівнобіжну з боком AB трикутника (Рис. 30); ці дві прості лінії стрінуться в точці E, а трикутник BEC і буде той, який нам треба було дорисувати. Коли розглядати тепер обидва трикутники разом, то ми побачимо, що вони творять рівнобіжник (параллелограмм). Основа цього рівнобіжника AC та сама, що й основа трикутника і вишина у них обох та сама BD. Поле цього рівнобіжника має в собі два таких, як поле нашого трикутника, а значить поле нашого трикутника є половина поля рівнобіжника. А поле рівнобіжника, як ми уже знаємо (стор. 43), є добуток від множення числа лінійних мір в його основі на число таких самих мір в його вишині; але його основа та вишина ті самі, що і у трикутника ABC, — значить, *щоб обрахувати поле нашого трикутника, треба взяти половину добутка від множення числа лінійних мір в його основі на число таких самих мір в його вишині.*

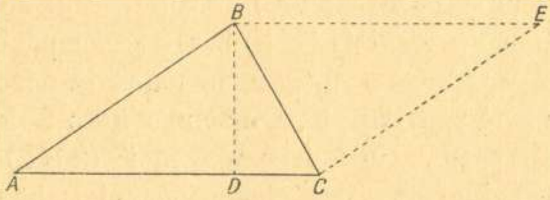


Рис. 30. Поле трикутника.

Коли у прямокутного трикутника взяти одну з його прямок (катетів) за основу, тоді друга прямка буде його вишиною; значить, тоді поле прямокутного трикутника буде половина добутка від множення чисел лінійних мір в його прямках (катетах). Так наприклад, основами тієї трьохстінної призми, котрої діаграмму ми рисували (Рис. 25, стор. 57), суть прямокутні трикутники з прямками (катетами) в 9 сантіметрів та в 12 сантіметрів; значить поле її має в собі $(12 \times 9):2 = 54$ квадратових сантіметрів.

Основа трикутника, нарисованого на рисункові 30$^{\text{му}}$, має 4 сантіметрів, а вишина його 2 сантіметри (Рис. 30), значить поле його має в собі: $(4 \times 2):2 = 4$ квадратових сантіметрів. Само собою розуміється, що колиб ми хотіли накласти на поле цього трикутника 4 квадратових сантіметрів цілими, то ми не могли б того зробити, — деякі з тих квадратів довелося б розкраяти на шматочки. На рисункові 31$^{\text{му}}$ нарисовано такий самий трикутник, як і на рисункові 30$^{\text{му}}$, значить і поле його має в собі 4 квадратових сантіметрів. На основу цього трикутника, яка має в собі 4 лінійних сантіметрів, поставлено 4 квадратики, кожен в 1 квадратовий сантіметр (Рис. 31). Коли від двох квадратиків з лівого боку та від одного з правого боку відрізати ті частини їх, які виходять за межу поля трикутника, то ті відкраяні клинки якраз можна буде покласти на ту частину трикутника, що лежить над горішньою лінією квадратів.

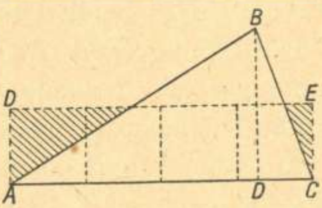


Рис. 31.

Під кінець зауважимо, що поле кожного трикутника можна прирівняти до поля прямокутника (або рівнобіжника), який має таку саму основу, як і трикутник, а вишину удвічі меншу ніж вишина трикутника, або удвічі меншу основу а таку саму вишину. Наприклад на рисункові 31$^{\text{му}}$ поле трикутника ABC і прямокутника $ADEC$ рівні проміж себе або однакові, бо прямокутник має ту саму основу AC, що й трикутник, а вишину удвічі меншу ніж трикутник.

Задачі на обрахунок.

9. Два селянина міняються левадами. У першого левада має форму прямокутника 50 сажнів завдовжки та 30 сажнів завширшки, а у другого — форму прямокутного трикутника з прямками (катетами) в 65 сажнів та в 40 сажнів. Хто кому має доплатити і скільки, коли кожен з них оцінює свою землю на 40 копійок за квадратову сажень? (Відповідь: Другий першому — 80 карбованців.)

10. Один чоловік хоче виміняти у другого леваду, яка має форму трикутника з основою в 120 сажнів і з вишиною в 40 сажнів. За цю леваду він має дати смугу, відрізану вдовж од його ниви, яка має форму прямокутника. Яку завширшки треба відрізати ту смугу, коли вона має бути завбільшки, як і левада, і коли довжина ниви, від якої її треба відрізати, 80 сажнів. (Відповідь: 30 сажнів.)

---

8. Задачі на будування.

Нам уже доводилось говорити про рисування або, як кажуть, про *будування* діаґрамм бруса, куба та трьохстінної призми. Нам доводилось там рисувати або *будувати* де-які ґеометричні фіґури: прямокутники, квадрати та трикутники. В ґеометрії або там, де послугуються знанням ґеометрії, доводиться часто будувати всякі ґеометричні фіґури. Тому нам треба тут спинитися на задачах на будування. Як задачі аритметичні мають навчити нас тому, як треба обраховувати в ріжних випадках життя, так задачі ґеометричні на будування мають навчити нас будувати всякі геометричні фіґури, як то буває потрібно при *з'йомці* плянів, в землемірстві, навіть в столярстві та в механичному ділі. Де що ми вже вміємо будувати. Ми вміємо збудувати просту лінію, користаючись лінійкою, прямий кут, користаючись косинцем (сторінка 25), користаючись лінійкою та косинцем, вміємо збудувати прямокутник та квадрат, як то доводило ся нам уже робити при рисуванні діаґрамм бруса та куба (сторінки 27 та 35). Тепер поговоримо ще про де-які найпростіші ґеометричні будування.

Зауважимо тут, що проста лінія означеної довжини, то б то така, що має в собі якесь означене число якихсь лінійних мір, зветься: *відтинок* простої лінії (або просто відтинок); бо коли ми кажемо: проста лінія, то маємо на увазі таку лінію, яку ми можемо уявити протягненою в один чи в другий бік до неозначеної довжини. Нам доводилось уже при рисуванні ґеометричних фіґур відмірювати відтинки простої лінії, ми робили те, користуючись такою або иншою лінійною мірою. Та часом доводиться обмірювати відтинок такої довжини, яку має якась инша лінія. Ми можемо і в цім разі обійтися якоюсь міркою, а можемо те зробити і без мірки, як ми часом те робимо відмірюючи якусь довжину мотузком або лозинкою. При будуванні таке відмірювання відтинка рівного (то б то однакового довжиною) другому данному відтинку робиться за допомогою приладу, що зветься *циркулем*. Циркуль має дві ніжки загострені на кінцях, які сполучено нагорі *шарніром* так, що їх можна розхиляти більше або менше. На малюнкові 32-му показано, як відмірюється циркулем відтинок простої. (Рис. 32.)

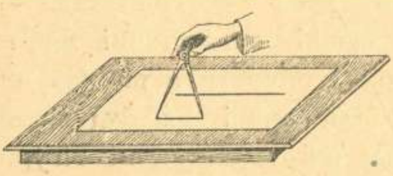


Рис. 32. Відмірювання відтинка циркулем.

Щоб збудувати (або попросту нарисувати) відтинок рівний другому (данному) відтинку треба тільки, поставивши одну ніжку циркуля на один кінець данного відтинка, розхилити ті ніжки так, щоб кінець другої став на другий кінець відтинка; потім перенісши циркуль з розхиленими таким чином ніжками на нарисовану раніш просту лінію, означити на ній, притиснувши кінцями ніжок, довжину данного відтинка.

Циркуль також вживають для того, щоб рисувати ***коло*** (ціле або частину його то б то дугу). Тоді на одній з ніжок його прилаштовують олівець (карандаш). Щоб нарисувати циркулем коло, треба увіткнути одну ніжку (без олівця) приблизно у середину того місця, на якому має бути нарисоване коло (ця точка буде центер кола) та, відхиливши другу більше або менше, в залежности від того, яке саме завбільшки коло хочемо нарисувати, вести її по паперу, повертаючи коло першої або на ціле коло або на частину його, дивлячись на те, чи нам треба нарисувати ціле коло чи тільки його частину, то б то дугу. На малюнкові 33-му показано, як те робиться (Рис. 33). Віддалення однієї ніжки від другої (Рис. 33, рисунок кола з правого боку) є віддалення кожної точки кола від центра і зветься воно: *луч* кола або *радіус* кола. Значить, на рисункові 33-му (праворуч рисунок кола) луч кола є OA.

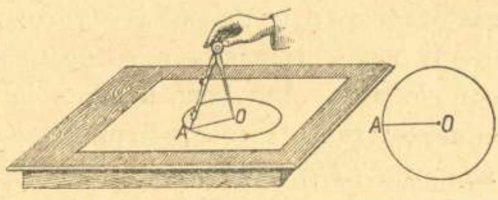


Рис. 33. Рисування кола циркулем.

Будування кута, рівного данному. Часто доводиться також будувати кут, котрий був би рівний (то б то з таким самим розхилом рамен) другому (данному) кутові. Тут ми й розглянемо, як розвязати цю задачу на будування. На рисункові 34-му нарисовано кут ABC

Рис. 34. Будування кута, рівного данному.

(данний кут), котрому треба збудувати рівний (або пристайний) на лінії MN (Рис. 34). Зауважимо тут, що кут, який нам треба збудувати, буде рівний або пристайний данному, хоч би рамена його були коротші або довші віж у данного, — аби б тільки у нього ті рамена були розхилені так само як і у данного. Візьмімо яку-небудь точку на лінії MN, наприклад точку B_1, за вершок кута, який нам треба збудувати, а лінію $B_1 N$ за одно з його рамен; тепер, значить, треба добудувати друге рамено, ведучи його з точки B_1 так, щоб воно було відхилене від рамена $B_1 N$ так само, як рамено BA — від рамена BC у данного кута. Щоб відміряти той розхил вірно, треба його міряти на однаковому віддаленню від вершка, як у данного кута так і у того, котрий ми будуємо; на якому саме віддаленню, те не має значіння, — аби б на однаковому. Для того з вершків данного кута та того, який будуємо, як з центрів, *накреслемо* циркулем дугу ED та $E_1 D_1$, яким-небудь аби однаковим для обох дуг радіусом (лучем). Така дуга на данному куті перетне його рамена в точках E та D_1, віддаленням яких одна від другої і можна міряти розхил рамен цього кута. Друга дуга, котру ми *накреслили* з точки B_1, як з центра, перетне лінію $B_1 N$ у точці E_1. Коли тепер відміряти (циркулем) від точки E_1 точку D_1, так само віддалену від точки E_1, як точка D від точки E на данному куті, та провести з точки B_1 через точку D_1 рамено $B_1 A_1$, то воно буде відхилене від рамена $B_1 C_1$ так само, як рамено BA — від рамена BC у данного кута, а значить кут $A_1 B_1 C_1$ є рівний або пристайний кутові ABC, то б то данному.

Як можна збудувати відтинок простої лінії рівний данному без циркуля, *користуючись* якогось міркою, так само можна збудувати і кут рівний данному без циркуля, тільки тоді і тут треба мати якусь міру, котрою можна б було користатись. За міру для кутів беруть прямий кут, та тільки, позаяк часто доводиться обмірювати та будувати кути, які або менше прямого або більше його на якусь його частину, то за меншу чи за дрібнішу міру беруть девятьдесяту частину ($\frac{1}{90}$) прямого кута, яка зветься *ступінь* (або *градус*). Значить, прямий кут має в собі 90 ступінів (пишуть звичайно так 90^0); кут, який є половина прямого, має 45^0 ($90^0 : 2$); кут, який є третя частина прямого, має 30^0 ($90^0 : 3$); кут, який є півтора прямого, має 135^0 ($90^0 + 45^0$) і так далі.

Для обмірювання кутів ступінями вживається прилад, який зветься *кутомір* (або транспортір). Цей прилад показано на рисункові 35-му. Як бачимо, він уявляє з себе півкола з центром у точці C (Рис. 35). Ми уже бачили,

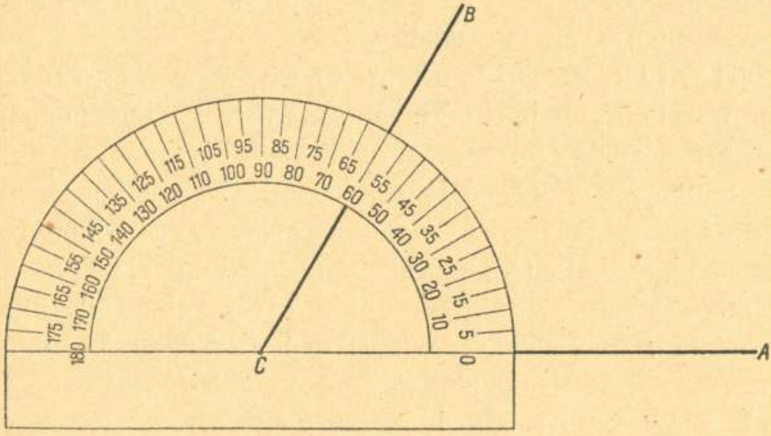


Рис. 35. Транспортір або кутомір.

як дугою кола можна міряти кути *(Рис. 34, сторін. 69)*. Отже й цим півколом можна обмірювати росхил рамен кута; для того його поділено на ступіні. У цілому півколі є тих ступінів 180, а в половині його (значить у чверті кола) їх є 90, бо чверть кола як-раз і міститься між раменами прямого кута, який має 90^0. На рисункові ступіні показані через кожних 5. Так з правого боку стоїть 0^0, потім $5^0, 10^0, 15^0$ і так далі аж до 180^0. Щоб обміряти кутоміром кут, треба покласти його так, щоб вершок кута прийшовся як раз у центр кутоміра (в точку *C*), а одно з рамен кута пішло по горішній лінії основи кутоміра. На нашому рисункові *CA* і є це рамено кута *ACB*, який нам треба обміряти (Рис. 35). Потім треба подивитися, через котрий ступінь, лічучи від того краю, де стоїть 0, проходить друге рамено кута. Цифра, через котру воно проходить, і покаже нам, скільки ступінів має в собі кут. На нашому рисункові (Рис. 35) друге рамено кута проходить через риску, на якій стоїть 60, значить, цей кут має в собі 60^0. Так само можна й будувати кути, які б мали те або инше число ступінів. Значить, можна також, за допомогою цього приладу, збудувати кут рівний данному.

Поділення відтинка пополам. Часто буває нам потрібно поділити відтинок простої лінії пополам або, як ще кажуть, знайти середину відтинка, то б то ту точку, яка його поділяє пополам. Звичайно ми можемо і цю задачу на будування розвязати за допомогою якоїсь мірки, відмірявши від одного кінця відтинка половину того числа мір, яке має в собі цілий відтинок. Та незавжде це буває зручно; через те ми скажемо тут про инший спосіб, який можна вважати за спосіб начисто геометричний. А саме: можна поділити відтинок пополам, то б то на дві рівні між собою частини, послуговуючись циркулем та лінійкою. Звернімось до рисунка 36-го. Нехай *AB* (Рис. 36) є той відтинок простої, який нам треба поділити пополам. Поставимо циркуль кінцем загостреної ніжки в точку *A*, а другу ніжку, в яку

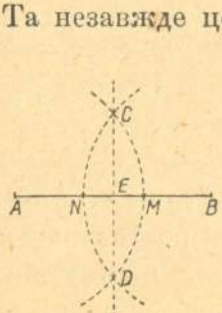


Рис. 36. Поділення відтинка пополам.

вставлено олівець (карандаш), відхилимо так, щоб вона кінцем своїм стала в якусь точку на лінії, наприклад в точку *M*, яка б (точка) була віддалена від точки *A* більше ніж на половину відтинка *AB*, то б то яка лежала б за серединою відтинка. Хоч ми ще й не знаємо, де та середина відтинка, та ми можемо це зробити наоко. Відхиливши отак другу ніжку та повертаючи її круг першої, яка стоїть своїм кінцем у точці *A*, накреслимо нею дугу *CMD*. Тепер перенесімо загострену ніжку у точку *B* і накреслимо дугу *CND* таким самим лучем (радіусом), як і першу дугу, — длятого переносячи циркуль, треба пильнувати, щоб його ніжки остались з тим самим розхилом, який вони мали, коли ми накреслювали першу дугу. Ці дві дуги перетнуться одна з другою (коли тільки їх накреслено лучем справді більшим половини відтинка) і нагорі і напизу. На нашому рисункові (Рис. 36) горішня точка перетину дуг є точка *C*, а нижня — точка *D*. Тепер покладімо лінійку рубом на точки *C* та *D* і проведімо лінію *CD*; ця лінія перетне наш відтинок у точці *E*, котра і буде серединою відтинка, то б то тією точкою, яка цей відтинок поділяє пополам, значить наша задача розвязана.

Зазначимо ще тут, що проста лінія *CD* (Рис. 36) перетинає відтинок *AB* так, що творить з ним чотирі прямих кута (два над відтинком та два під ним), значить, вона є простопадна до відтинка *AB*. Позаяк разом з тим вона проходе через середину відтинка, то ми її зватимемо *середнім простопадом*, або *середнім сторчем* відтинка *AB*. Значить, задача про поділення відтинка пополам, або про визначення його середини та задача про будування середнього простопаду або середнього сторча відтинка є одна і та сама задача.

Поділення відтинка на яке-небудь число рівних частин. Коли треба поділити відтинок на 4 рівних частини, то поділивши його пополам, ми поділяємо кожну його половину ще пополам. Так само можна поділяти відтинок на 8, на 16 рівних частин і так далі. Та коли відтинок треба поділити на 3, на 5, або й на 6, на 10 рівних частин цей спосіб уже не годиться. Ми покажимо тут инший, яким можна поділяти відтинок на всяке число рівних частин. Цей спосіб показано на рисункові 37-му, де відтинок *AB* поділено на 5 рівних частин. Ми робимо це так: від якогось з кінців відтинка, наприклад від точки *A* (Рис. 37), проводимо яку-небудь

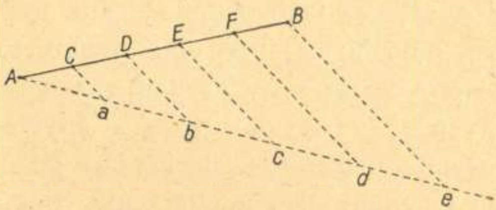


Рис. 37. Поділ відтинка на яке-небудь число рівних частин.

просту лінію *Ae*; на ній починаючи від точки *A*, відкладаємо 5 яких небудь, тільки цілком рівних довжиною, частин *Aa*, *ab*, *bc*, *cd* та *de*; через останню точку *e* та через другий кінець відтинка, значить через точку *B* за допомогою лінійки проводимо просту лінію *eB*; потім через точки *d*, *c*, *b* та *a* по черзі проводимо прості лінії: *dF*, *cE*, *bD* та *aC* *рівнобіжно* (параллельно) з першою лінією *eB*, а значить і рівнобіжно одну з другою. Ці лінії перетнуть наш відтинок *AB* у точках *F*, *E*, *D* та *C*, які і поділять відтинок на 5 рівних частин. Таким способом можна ділити відтинок на яке б не було число рівинх частин, тільки треба притому пильнувати, щоб ті лінії, які поділяють відтинок на рівні частини, були таки зовсім рівнобіжними (параллельними) поміж собою.

Ми розглянули таким чином кілька найпростіших та разом з тим дуже важливих задач на будування. Взагалі ж цих задач можна придумувати без кінця-краю. Далі ми ще наведемо кілька уже більш складних задач на будування.

Задачі на будування трикутників. І. *Збудувати трикутник, коли нам дано три його боки* (то б то коли нам відома довжина трьох його боків). *Розвязання задачі.* В умові задачі сказано, що нам дано три боки трикутника, який нам треба збудувати. Це значить, що нам дано (або відомо), який завдовжки має бути кожний з трьох боків трикутника. Ця довжина може бути дана або в якихсь мірах (наприклад в сантіметрах, метрах, чи в вершках, аршинах, чи в якихсь инших) або прямо трьома відтинками означеної довжини. Нехай ті три боки, про які говориться в умові задачі, мають бути в 4, 3 й 2 сантіметри. Проведімо просту лінію *MN* (Рис. 38),

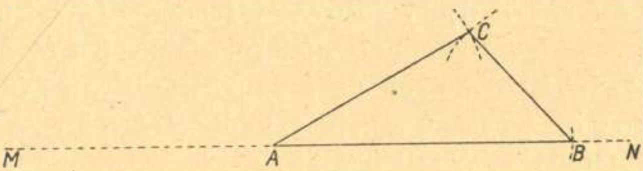


Рис. 38. Будування трикутника по 3 боках.

на ній від точки *A* до точки *B* одміряймо відтинок *AB* в 4 сантіметри, — це і буде один з боків трикутника; тепер з точки *A* окреслімо дугу лучем (радіусом) такої довжини, яку має котра-небудь з двох инших боків трикутника, наприклад в 3 сантіметри, а з точки *B* окреслімо дугу лучем в 2 сантіметри (3 ій бік). Ці дві дуги перетнуться в точці *C*, яка й буде третім вершком трикутника. Значить, коли тепер проведемо прості *AC* та *BC*, то трикутник *ACB* і буде той, який нам треба було збудувати, бо бік *AB* має 4 сантіметри, бік *AC* — 3 сантіметри, а бік *BC* — 2 сантіметри. Отже задача розв'язана.

II. *Збудувати трикутник, коли нам дано два його боки та кут між тими боками* (то б то коли нам відома довжина двох його боків та на який кут вони розхилені).

Нехай два боки трикутника мають в собі 4 та 5 сантіметрів, а кут між ними має 35^0 (ступінів). Будуємо так: на простій *MN* (Рис. 39) відмірюємо відтинок *AB* в 4 сантіметри, від точки *B* проводимо просту *AC* так, щоб вона творила з простою *AB* кут в 35^0, на ній відмірюємо другий бік трикутника,

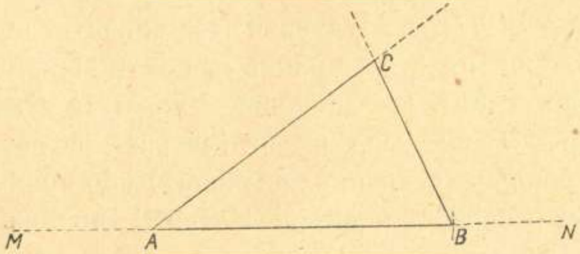


Рис. 39. Будування трикутника по 2 данним та куту між ними.

то є то 5 сантіметрів, це буде відтинок *AC;* коли точку *C* сполучимо з точкою *B* простою лінією *CB,* то трикутник *ACB* і буде той, який нам треба було збудувати, бо його бік *AB* має 4 сантіметри, бік *AC* — 5 сантіметрів, а кут *A* (або $< CAB$) має 35^0.

III. *Збудувати трикутник, коли дано його один бік та два кути, які прилягають до цього боку.*

Нехай бік трикутника має 4 сантіметри, один кут має в собі 35^0, а другий 65^0. Проводимо просту *MN* (Рис. 40), на ній одмірюємо бік трикутника *AB,* то є то 4 сантіметри; потім біля точки *A* будуємо один з кутів трикутника, наприклад той, що має 35^0, а біля точки *B* — другий, значить в 65^0; двоє рамен ціх кутів перетнуть ся між собою у точці *C,* яка і буде третім вершком трикутника. Значить трикутник *ACB* і є той, який нам треба було збудувати.

IV. *Збудувати рівнобіжник* (параллелограмм) *по двом його бокам* (нерівним між собою) *та куті між ними.*

Нехай боки рівнобіжника будуть в 5 та в 3 сантіметра, а кут між ними в 50^0.

Проводимо просту *MN* (Рис. 41), на ній одмірюємо бік рівнобіжника *AB* в 5 сантіметрів, біля точки *A* будуємо кут рівнобіжника в 50°, по його рамені відмірюємо другий бік рівнобіжника AC в 3 сантіметри; тепер, щоб добудувати два инші боки рівнобіжника, проводимо з точки C просту CD рівнобіжну з AB, а з точки B — просту BD рівнобіжну з AC; ці дві прості перетнуться у точці D, — чотирикутник $ACDB$ і буде той рівнобіжник, який нам треба було збудувати.

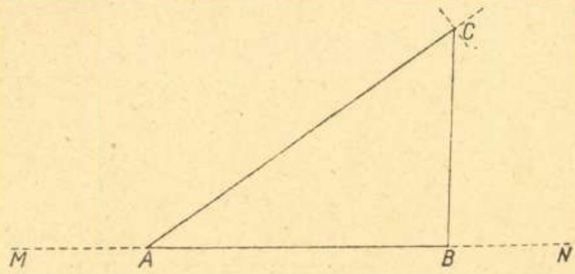


Рис. 40. Будування трикутника по одному бокові та двом кутам.

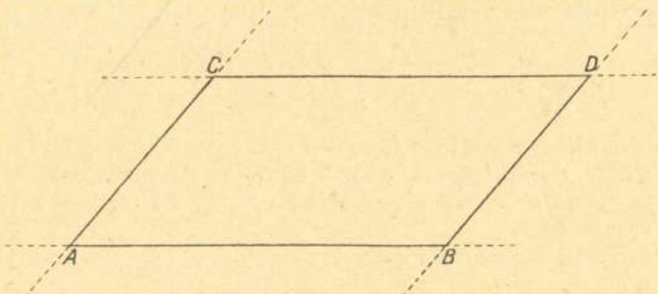


Рис. 41. Будування рівнобіжника.

Скажемо тут доречі, як можна, послуговуючись лінійкою та косинцем, проводити прості лінії між собою рівнобіжні. Нехай нам треба провести просту рівнобіжну з простою MN, яка уже нарисована (Рис. 42 ліворуч). Прикладуємо косинець так, щоб він прилягав до простої MN однією з своїх прямок (катетів), а до другого приставляємо щільно рубом лінійку. Коли тепер пересунути косинець так, щоб прямка зоставалася притуленою до лінійки, то та прямка, яка була прикладена до лінії MN, теж пересунеться, та тільки буде рівнобіжна з простою *MN*; значить, коли тепер ми проведемо біля неї олівцем, то нарисована проста буде теж рівнобіжна

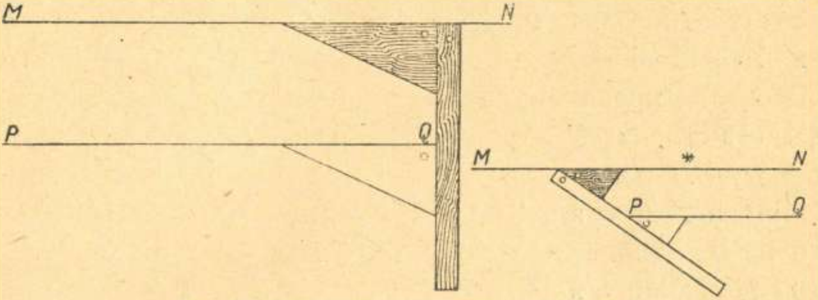


Рис. 42. Рисування рівнобіжних простих ліній.

з *MN*. З правого боку на тому самому рисункові показано ще й инший спосіб (Рис. 42 праворуч).

На цьому поки що ми й кінчаємо розгляд задач на будування. Далі ми подаємо ще кілька задач, над розвязанням яких поміркує сам читач.

Задачі на будування.

1. Збудувати прямокутний трикутник з прямками (катетами) в 3 та в 2 сантіметри.

Увага: Коли загадується збудувати прямокутний трикутник, то само собою розуміється, що між данними є кут в 90^0 то б то прямий.

2. Збудувати прямокутний трикутник з прямкою в 4 сантіметри і з кутом біля тієї прямки в 30^0.

3. Збудувати прямокутний трикутник з прямкою в 3 сантіметри та протипрямкою в 5 сантіметрів.

4. Збудувати рівнобічний трикутник з боками в 4 сантіметри.

5. Збудувати рівнораменний трикутник з основою в 3 сантіметри та з раменами в 5 сантіметрів кожне.

6. Збудувати прямокутник з боками в 5 сантіметрів та 2 сантіметри.

7. Збудувати рівнобіжник з боками в 5 та в 3 сантіметри та з косиною (діаґоналею) в 7 сантіметрів.

Увага: два боки рівнобіжника та косина його суть три боки трикутника, який є половина рівнобіжника. Збудувавши (по трьом бокам) цей трикутник, легко добудуємо його до рівнобіжника.

9. Многокутники.

Досі нам траплялося говорити про простолінійні замкнені ґеометричні фіґури, обмежені трьома або чотирма простими лініями, то б то замкнені фіґури з трьома або чотирма боками; то були трикутники та чотирикутники. Та легко зрозуміти, що частину площі можна обмежити з усіх боків і більшим числом простих ліній, то б то пятьма, шістьома і так далі простими лініями. Такі замкнені фігури взагалі звуться: *многокутники*, бо всяка замкнена простолінійна фіґура завжде має стільки кутів, скільки й боків. До них можна залічувати і трикутники, і чотирикутники і тоді можна сказати, що трикутник є многокутник з найменшим можливим числом боків. Кожен з многокутників, коли нам відомо число його боків, з окрема можна називати своїм назвищем, наприклад: пятикутник, шостикутник, десятикутник і так далі. На рисункові 43-му нарисовано пятикутник та шостикутник. Прості лінії, які сполучають вершки двох кутів, звуться *діаґоналями (або косинами)* многокутників; на нашому рисункові де-які з них показано переривчастими лініями (Рис. 43).

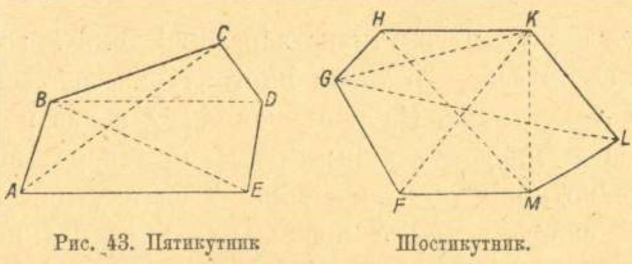


Рис. 43. Пятикутник Шостикутник.

Коли діагоналі провести у многокутника з вершка одного якого-небудь його кута, то він тими діаґоналями розбивається на кілька трикутників. На рисункові 44-му показано восьмикутник, який діагоналями, проведеними з вершка кута A, розбито на 6 трикутників (Рис. 44).

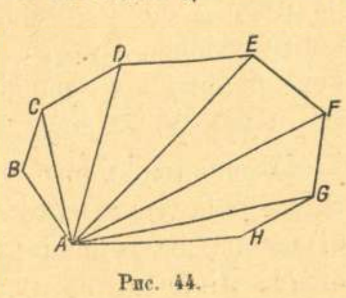


Рис. 44.

Може бути, що у многокутника усі його боки рівні проміж собою, го б то однакової довжини, — тоді він зветься *рівнобічним многокутником.* Такі многокутники

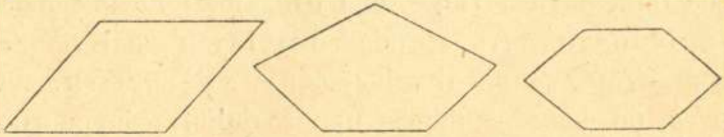


Рис. 45. Рівнобічні многокутники.

бачимо тут на рисункові 46-му. До таких многокутників належить прямокутник (Рис. 46).

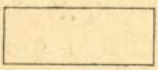


Рис. 46. Рівнокутний многокутник.

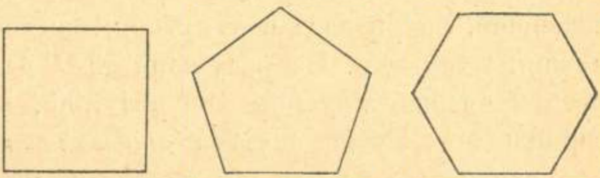


Рис. 47. Правильні многокутники.

Коли ж у многокутника заразом і боки його і кути рівні проміж себе, то такий многокутник зветься: *правильний многокутник.* На рисункові 47-му показано зразки правильних многокутників: тут маємо квадрат або правильний чотирикутник, правильний пятикутник та правильний шостикутник. У правильних многокутників, що мають парне (чітне) число боків, усі діаґоналі (косини), які сполучують вершки протилежних кутів, перетинаються у одній точці, яка лежить як-раз посередині многокутника, то б то на однаковому віддаленні від усіх його боків і від вершків усіх його кутів, і яку можна звати центром правильного многокутника.

Правильні многокутники з непарним (нечітним) числом боків теж мають центр, яким є точка однаково віддалена від вершків усіх його кутів та від усіх його боків. Лінії, що сполучають центр правильного многокутника з вершками усіх його кутів, творять стільки рівних між собою центральних кутів, скільки боків або кутів має правильний многокутник. Центр правильного многокутника з непарним числом боків лежить у точці перетину ліній, які сполучають вершок кожного кута з серединою протилежного кутові бока.

На рисункові 48-му маємо правильний восьмикутник з усіма діаґоналями, що сполучають вершки протилежних кутів (Рис. 48). Як видно на цьому рисункові, ті діаґоналі, перетинаючись у центрі многокутника, творять круг нього вісім рівних проміж себе кутів — це кути: *AOB, BOC, COD* і так далі. Ці кути можна звати центральними кутами правильного многокутника. Коли через ту саму точку *O*, то б то через центр проведемо дві прості лінії *MN* та *PQ* (Рис. 48) так, щоб вони були одна до другої простопадні, то матимемо круг тієї точки *O* чотирі прямих кути: *MOP, PON, NOQ* та *QOM*. Як видно на рисункові, усі вісім центральних кутів вміщаються в цих чотирьох прямих кутах; инакше кажучи усі центральні кути сполучені докупи творять чотирі прямих кути або мають усі разом стільки ступінів, скільки їх у чотирьох прямих кутах; а позаяк прямий кут має в собі 90^0, то значить усі вісім центральних кутів нашого правильного восьмикутника разом мають в собі $90^0 \times 4 = 360^0$.

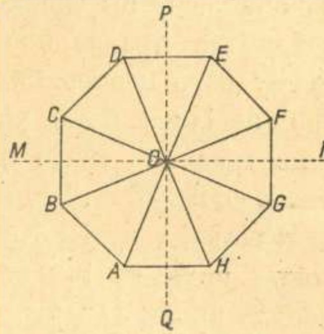


Рис. 48.

Це справедливо для центральних кутів всякого правильного многокутника. Значить, можна сказати, що у *всякого правильного многокутника сумма усіх його центральних кутів в 360^0*. А позаяк ці центральні кути між собою рівні, то поділивши 360^0 на число цих кутів, знайдемо скільки ступнів має в собі кожен з них. Так, наприклад, для правильного восьмикутника, що на рисункові 47-му, кожен з центральних його кутів має в собі $360^0 : 8 = 45^0$. У правильного десятикутника кожен з центральних його кутів має $360^0 : 10 = 36^0$. У квадрата — $360^0 : 4 = 90^0$, то б то кожен з центральних кутів є прямий, і так далі.

Можливість зарані вирахувати центральний кут правильного многокутника може послужити нам для будування всякого правильного многокутника. Покажимо на прикладі, як можна це зробити. Нехай нам треба збудувати правильний пятикутник. Починаємо з обрахунку його центральних кутів, — для того треба тільки 360^0 поділити на 5 рівних частин; значить кожний з з центральних кутів нашого правильного пятикутника має в собі: $360^0 : 5 = 72^0$. Тепер треба збудувати ці пять центральних кутів, то б то треба збудувати круг якоїсь точки пять кутів по 72^0 кожний. Для того від якоїнебудь точки O (Рис. 49) проводимо просту лінію OX; точку O візьмемо за центр нашого пятикутника, а просту OX за рамено одного з центральних кутів. Тепер за допомогою кутоміра (транспортіра) будуємо біля точки O кут XOA в 72^0, потім кути: AOB, BOC та COD, кожен теж в 72^0. Коли ми будували усі кути, ретельно одміріючи по 72^0, то останній центральний кут, який виявиться сам собою, мусить мати в собі теж 72^0. Тепер, коли відміряємо від точки O по раменах збудованих центральних кутів (по лучам) відтинки OA, OB, OC, OD та OE однакової довжини та сполучимо точки A, B, C, D та E між собою простими лініями, то й матимемо правильний пятикутник $ABCDE$. Таким способом можна

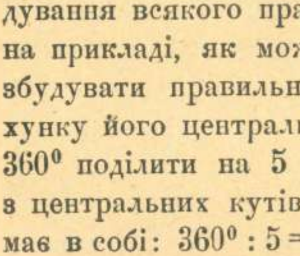


Рис. 49. Будування правильного многокутника.

збудувати всякий правильний многокутник, та де-які з них можна будувати і иншими способами, часом легчими ніж цей.

Зазначимо тут, що трикутник не може мати усі три кути рівні проміж себе і в той час нерівні проміж себе боки, або навпаки — рівні проміж себе боки і нерівні кути, як то може бути з чотирикутником (наприклад: прямокутник, ромб) або з иншими многокутниками. То б то: коли трикутник рівнокутний, то він тоді неодмінно і рівнобічний то б то правильний, або коли він рівнобічний, то він тоді і рівнокутний то б то знов так, правильний.

Обвід многокутника. Щоб обрахувати довжину обводу многокутника, треба обміряти усі його боки однією якоюсь мірою та сполучити в одно число ті числа, які показують, скільки тих мір в кожному з боків. Коли многокутник правильний, або хоч рівнобічний, то досить обміряти один бік, а потім число мір в тому боці намножити на число боків многокутника. Наприклад, коли у правильного шостикутника бік має 3 сантіметри, то його обвід має: 3 сант. $\times 6 = 18$ сантіметрів.

Поле многокутника. Щоб обміряти поле многокутника, треба розбити його на трикутники, наприклад діаґоналями (косинами), проведеними з вершка якогонебудь одного з його кутів. Позаяк ми уже знаємо, як треба обмірювати поле трикутника, то ми легко обрахуємо поле кожного з тих трикутників, на які ми розбили многокутник; потім треба тільки сполучити в одно число ті числа, які показують скільки квадратових мір в полі кожного з трикутників і ми матимемо число, яке визначатиме поле многокутника в тих самих квадратових мірах, якими обміряно поля трикутників. На рисункові 50-му маємо пятикутник, який діаґоналями з вершка кута A (Рис. 50) розбито на три трикутники. Щоб обрахувати поле цього многокутника, треба обміряти та обрахувати попереду поля цих трикутників. Почнем з трикутника ADE. Берем за його основу його бік AD, тоді вишиною його буде простопад (перпендікуляр), проведений на цю основу з вершка E, то б то лінія EF. Коли тепер обміряємо якою-небудь мірою основу AD та вишину EF, числа, які дістанемо таким чином, перемножимо та добуток від перемноження поділимо пополам, то й матимемо число, яке визначатиме поле трикутника ADE в відповідних квадратових мірах; так само обрахуємо поле трикутника ADC, беручи за його основу, наприклад, бік AD, а за вишину простопад на неї CG, та поле трикутника ABC, беручи за основу AC, а за вишину BH. Сполучивши в одну сумму числа, які визначають поля цих трьох простокутників, матимемо число, яке визначає поле нашого многокутника в тих самих квадратових мірах. Так само можна обміряти поле і чотирикутника, коли він не уявляє з себе одного з тих, для яких ми уже маємо инші способи обраховування їх поля (дивись сторінки: від 35 до 46).

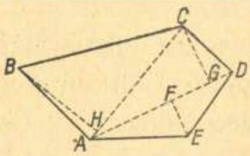


Рис. 50. Поле многокутника.

Коли треба обрахувати поле якогось правильного многокутника з парним числом боків, то найкраще буде розбити його на трикутники, проводячи діаґоналі проміж вершками протилежних кутів; ці діагоналі, як ми уже знаємо, у такого правильного многокутника перетинаються в одній точці, яка є центр многокутника. Всього трикутників буде стільки, скільки боків у многокутника і всі вони будуть проміж собою рівні. Тому, коли обрахуємо поле одного з них, то намноживши число квадратових мір в тому полі на число трикутників, то б то на число боків многокутника, то й матимемо число, що визначатиме поле многокутника в тих самих квадратових мірах.

Обрахуємо для прикладу поле правильного шостикутника, якого бік має 30 міллімтрів*) (Рис. 51). Сполучаємо діаґоналями вершки протилежніх кутів; таких діаґоналів буде три, а саме AD, BC та CF; ці діаґоналі, перетнувшись у центрі шостикутника O, розібють шостикутник на шість рівних проміж собою трикутників, що сходяться своїми вершками в центрі многокутника O. Нам треба обрахувати поле одного з них, наприклад трикутника AOB; його основа AB є бік нашого шостикутника, значить має в собі 30 міллімтрів. Проводимо з вершка його, то б то з точки O, просту OG простопадно до основи AB, ця проста OG буде вишиною тикутника; обмірявши її, знайдемо, що вона має в собі 26 міллімтрів. Значить поле трикутника має в собі: $(30 \times 26) : 2 = 780 : 2 = 390$ квадратових міллімтрів. А значить, поле шостикутника має: 390 кв. міллім. $\times 6 = 2340$ квадратових міллімтрів.

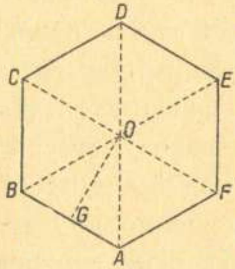


Рис. 51. Поле правильного многокутника.

Так само обраховується поле правильного многокутника і з непарним числом боків. Тільки розбивати його на трикутники доводиться, проводячи лінії з його центра до вершка кожного кута; а для того попереду треба відшукати той центр, провівши хоч дві лінії, які сполучають вершки двох кутів з серединами протилежних тим кутам боків.

---

*) Міллімтр є десята частина сантіметра.

10. Многостінні призми.

Ми уже познайомились з трьохстінною призмою, яка є половина бруса (сторінка 57 і далі) і яка через те має своїми основами трикутники, з котрих кожний є половина прямокутника, розрізаного по косині (діаґоналі), і через те є трикутник прямокутний. Та трьохстінна призма може мати своїми основами не тільки трикутники прямокутні, а також і всякі инші. Все, що було говорено про ту призму, про яку річ була раніш (стор. 57), буде справедливо також відносно инших трьохстінних призм; так само у них горішня та спідня основи будуть пристайні (однакові) між собою трикутники з рівнобіжними одна з другою площами; їх бічні стіни будуть прямокутники; усі бічні руби однакової довжини і рівнобіжні проміж себе, а руби основ подвоє рівні і рівнобіжні. Так само обраховується та обміряється бічня і повна поверхня та обєм у всяких трьохстінних призм, як і у тієї, про яку уже було говорено. Для зразка подаємо тут (Рис. 52) діаґраму трьохстінної призми з рівнобічними трикутниками в основах в зменшеному вигляді. Для того, щоб зробити таку діаґрамму, треба тільки нарисувати три однакових прямокутника $ABCD$, $DCEF$ та $FEGH$ довжиною в 25 сантіметрів та шириною в 10 сантіметри, потім до середнього прямокутника нагорі та нанизу прибудувати по одному рівнобічньому трикутнику з боками в 10 сантіметри кожний; значить, нам доведеться будувати

Рис. 52. Діаґрамма трьохстінної призми. (В зменшеному вигляді.)

трикутники по трьом бокам, як ми уже те робили (стор. 76, задача 1).

Чотиристінна призма. Призма може мати своїми основами також два рівних між собою чотирикутники з рівнобіжними площами; тоді вона зветься: *чотиристінна призма*. Її бічними стінами будуть так само, як і у трьохстінної, прямокутники, і взагалі все у неї буде так само, як і у трьохстінної призми, крім числа бічних стін, яких у неї чотирі, а не три. Як поверхні її (бічна та повна), так і обєм обраховуються і для цієї призми так само, як і для трьохстінної. Спідньою та горішньою основами чотиристінної призми може бути всякий чотирикутник: і прямокутник, і квадрат, і рівнобіжник, і ромб, і трапез, і просто якийсь чотирикутник. Коли вона має своїми основами прямокутники або квадрати, то вона по своїй формі нічим не відріжняється від бруса, — тому брус ми можемо також звати чотиристінною призмою. Значить, на рисункові 3-му (стор. 13), а також на рисункові 23-му (стор. 57) ми маємо взірець і бруса і чотиристінної призми в той самий час. Також на рисункові 13-му (стор. 27) ми маємо діаґрамму для моделі бруса або для моделі чотиристінної призми. Подаємо тут ще рисунок діаґрамми (в зменшеному вигляді) чотиристінної призми, яка має своїми основами ромб (Рис. 53).

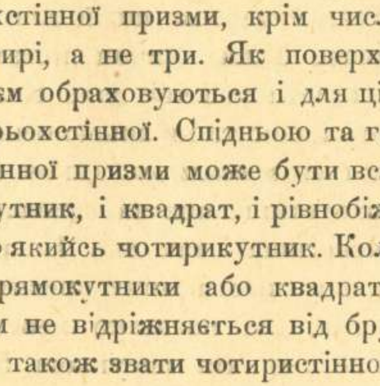


Рис. 53. Діаґрамма чотиристінної призми. (В зменшеному вигляді.)

Як бачимо, ця діаґрамма складається з чотирьох однакових прямокутників та двох однакових ромбів, добудованих угорі та на низу до одного з прямокутників.

Многостінні призми. Горішньою та спідньою основами у призми можуть бути також два яких-небудь многокутники, однакових між собою. Тоді призма зветься *многостінною призмою*. І у неї теж бічні стіни будуть прямокутники, усі бічні руби проміж себе рівні та рівнобіжні, а руби основ подвоє рівні та рівнобіжні. Бічна та новна поверхні її та обєм обраховуються теж тим самим способом, що й для трьохстінної та чотиристінної призм. Таким чином призми можуть бути: пятистінна, шостистінна і так далі. Коли многокутники, які служуть горішньою та нижньою основами призми вірні, то призма зветься *правильною*. Таким чином може бути: правильна трьохстінна призма, правильна чотиристінна, правильна пятистінна і так далі. На рисункові 55-му показано правильну шостистінну призму, три її бічні стіни нам видно, а три, які показано переривчастими лініями, невидно. (Рис. 54). На рисункові 55-му показано діаґрамму цієї призми. Вона складається з шести однакових прямокутників, та двох однакових правильних шостикутників, які прибудовано угорі та нанизу до одного з прямокутників. Скажемо тут доречі, як рисується правильний шостикутник. Для того через середину того прямокутника, біля якого ми хочемо збудувати шостикутники, проводимо просту лінію *AB* (Рис. 55). Від лівого горішнього вершка того самого прямокутника, то б то від точки *C* відміряємо на лінії *AB* точку *A* так, щоб вона була віддалена від точки *C* на ширину прямокутника або на довжину, яку повинен мати кожен бік правильного шостикутника. Тепер

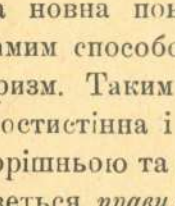


Рис. 54. Правильна шостистінна призма.

Рис. 55. Діаґрамма правильної шостистінної призми. (В зменшеному вигляді.)

точку A беремо за центр і з неї окреслюємо коло лучем (радіусом) AC, значить так, щоб він пройшов через точку C; бік прямокутника CD, що має таку саму довжину, як і луч кола, і буде одним з боків нашого шостикутника. Взявши довжину цього бока циркулем або якою мірочкою, станемо відміряти його, починаючи від точки C, ще пять раз так, щоб обидва кінці що-разу були на обводі кола; коли ми усе це робитимемо ретельно і точно, то за пятим разом ми прийдемо як-раз у точку D. Сполучивши тепер точки, які маємо після одмірювання на обводі кола, то б то точки: C, E, F, G, H та D, простими лініями, матимемо правильний шостикутник. Такий спосіб будування правильного шостикутниа виникає з того, що довжина його бока однакова з довжиною луча (радіуса) кола, але проходе через усі вершки шостикутника.

Таким чином усі призми, незалежно від того, яку фіґуру вони мають своїми основами, инакше кажучи, незалежно від того, скільки вони мають бічних стін, мають отакі ознаки:

1. Основи горішня та спідня суть фіґури пристайні між собою (або однакові), а площі їх рівнобіжні одна до другої.

2. Бічні стіни суть прямокутники, котрих площі простопадні до площ обох основ. (У правильних призм усі ці прямокутники пристайні між собою).

3. Усі бічні руби однакової довжини та рівнобіжні поміж собою.

4. Руби основ подвоє (ті що прилягають до одної стіни) однакової довжини та рівнобіжні.

5. Довжина бічного руба призми є разом і довжина її вишини.

6. Число квадратовях мір бічної поверхні призм є добуток від множення числа відповідних лінійних мір в обводі її основи на число таких самих мір в вишині (то б то в бічному рубові) призми.

7. Число кубних мір в обємі призми є добуток від множення числа відповідних квадратових мір в її основі на число відповідних лінійних мір в вишині (то б то в бічному рубові) призми $(V = S \times H)$.

Крім тих міркувань, якими можна довести, що наведений вище спосіб обраховування обєму призм є правильний і які ми тут не подаємо через те, що вони досить складні, можна впевнитись в правильности його ще й безпосереднім обмірюванням цього обєму. Для того треба зробити модель призми з картону або без верхньої основи або так, щоб та основа не була приклеяна та щоб її можна було відчиняти, як покришку. Крім того треба зробити так само три куби, які служитимуть нам мірою: один з рубом в 10 сантіметрів, значить з обємом в 1000 кубних сантіметрів $(10 \times 10 \times 10 = 1000)$; другий з рубом в 5 сантіметрів, значить з обємом в 125 кубних сантіметрів $(5 \times 5 \times 5 = 125)$ та ще один з тоненького картону з рубом в 1 сантіметр значить з обємом в 1 кубний сантіметр $(1 \times 1 \times 1 = 1)$. Обмірявши поле основи призми та її вишину, обрахуємо попереду її обєм; потім, насипаючи повно піску то в один, то в другий, то в третій куб, будемо пересипати його у призму, поки вона не стане повною вщерть; коли ми обрахуємо потім, скільки кубних сантіметрів нам треба було всипати піску, щоб наповнити призму, то ми побачимо, що то буде як-раз те саме число, яке ми нарахували попереду. Положим для прикладу, що ми зробили таку модель шостистінної призми з основою, що має поле в 260 квадратових сантіметрів, та з вишиного в 30 сантіметрів, тоді її обєм буде: $260 \times 30 = 7800$ кубних сантіметрів. Коли тепер почнем перевіряти цей обрахунок обєму піском, то побачимо, що для того, щоб наповнити призму піском вщерть, нам доведеться туди всипати 7 раз з найбільшого куба, то б то 7 раз по 1000 кубних сантіметрів, 6 раз — з середнього, то б то 6 раз по 125 кубних сантіметрів та 50 раз з найменьшого, то б то 50 раз по 1 кубному сантіметрові, а всього буде:

1000 куб. сант. $\times 7 = 7000$ кубн. сантіметр.
125 куб. сант. $\times 6 = 750$ кубн. сантіметр.
1 куб. сант. $\times 50 = 50$ кубн. сантіметр.

А всього: 7000 куб. с. + 750 куб. сант. + 50 куб. сант. = 7800 кубних сантіметрів, то б то як-раз стільки, скільки ми нарахували попереду.

Замісць піску можна брати *опилки*, а коли модель так само, як і мірки, покрити лаком, то можна міряти обєм, наливаючи води, — це краще, бо й пісок і *опилки* утрусюються, коли ми пересипаємо, і те може дати якусь ріжницю.

---

11. Піраміда.

На рисункові 56-му показано модель нового ґеометричного тіла. Як бачимо на цьому рисункові (Рис. 56), це тіло має спідною стіною або основою чотирикутник $ABCD$, а бічними стінами — чотирі трикутники, що сходяться своїми вершками в одній точці F. Таке тіло зветься: п і р а м і д а. Та точка, в якій сходяться своїми вершками трикутники, то б то бічні стіни піраміди, зветься *вершком* піраміди. Значить, вершком піраміди, що показана

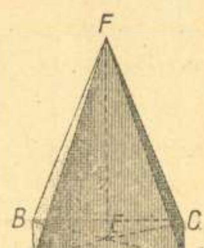


Рис. 56. Чотиристінна піраміда.

на цьому рисункові (Рис. 56), є точка F. Простопад FE, спущений з вершка піраміди на основу, зветься *вишиною* піраміди.

Ця піраміда має своєго основою чотирикутник; та піраміда може мати основою і всяку иншу простолінійну фіґуру: трикутник, пятикутник, шостикутник і так далі; залежно від того піраміда зветься: трьохстінна, пятистінна, шостистінна і так далі, бо кожна з цих пірамід має стільки бічних стін та стільки бічних рубів, скільки основа має боків. Значить, у всякої піраміди число бічних рубів однакове з числом основних рубів.

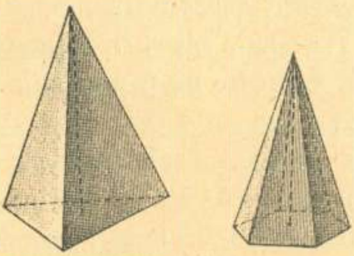


Рис. 57. Трьохстінна піраміда. Шостистінна піраміда.

На рисункові 57[му] показано трьохстінну та шости- стінну піраміди. У кожної з цих двох пірамід переривчастою лінією показано ту лінію, по якій треба міряти вишину піраміди.

Піраміда, у якої основа є правильний многокутник (то б то такий, у якого всі боки рівні проміж собою, а кути — проміж собою) та у якої лінія вишини проходить через центр основи, зветься: *правильна* піраміда. У правильної піраміди всі бічні стіни суть рівні проміж собою трикутники, і кожний з них є рівнораменний.

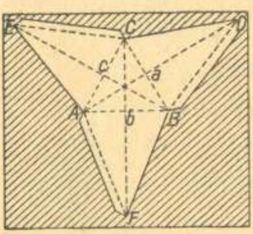


Рис. 58. Діаґрамма правильної трьохстінної піраміди. (В зменшеному вигляді.)

Діаґрамми пірамід. Нарисуємо тепер діаґрамми моделів деяких пірамід. На рисункові 58[му] показано діаґрамму правильнеї трьохстінної піраміди (в зменшеному вигляді). Для того берем шматок картону простокутної форми сантіметрів 30 завдовжки та сантіметрів 25 завширшки, на віддаленню 13 сантіметрів від нижнього краю провадимо лінію *AB* (Рис. 58) та відміряємо на ній 10 сантіметрів; це й буде один з боків основи піраміди. З точок *A* та *B* як з центрів окреслюємо радіусом в 10 сантіметрів дві дуги, які перетнуться у точці *C*, яка буде третім вершком трикутника; сполучивши точки *A* та *B*, точкою *C*, матимемо правильний трикутник *ABC*, який буде основою піраміди. Поділяємо його боки у точках *a*, *b* та *c* пополам та через ці точки і через вершки протилежних їм кутів проводимо лінії *AD*, *BE* та *CF*; ці лінії потрібні нам тільки, поки ми рисуємо або будуємо діаґраму; щоб відріжнити їх від тих переривчастих ліній, по яким треба буде перегинати діаґрамму, щоб зробити модель, ми їх рисуємо точечними лініями. На цих лініях від точок *a*, *b* та *c* відміряємо по 12 сантіметрів до точок *D*, *E* та *F*, які беремо за вершки бічних трикутників; сполучивши ці вершки з точками *A*, *B* та *C* простими лініями, матимемо ще три трикутники, а саме: *AEC*, *CDB* та *ABF*; ці трикутники і будуть трьома бічними стінами піраміди. Тепер лишається тільки викраяти діаґрамму та, перегнувши по переривчастим лініям, склеяти або зшити модель.

На рисункові 59-му маємо діаґрамму моделі правильної чотиристінної піраміди. На шматкові картону квадратової форми сантіметрів в 35 завдовжки та завширшки будуємо квадрат *ABCD* (Рис. 59) з боками в 10 сантіметрів так, щоб він був як-раз посередині картону; для того найкраще буде провести спочатку лінії *EG* та *FH*, якіб сполучали середини боків шматка картону; точку *O*, в якій ці лінії перетнуться, беремо за центр квадрата *ABCD*, який буде основою піраміди; на чотирьох його

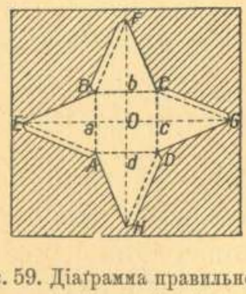


Рис. 59. Діаґрамма правильної чотиристінної піраміди. (В зменшеному вигляді.)

боках будуємо чотирі однакових рівнораменних трикутники, обмірявши для того від точок a, b, c та d відтинки aE, bF, cG та dH в 12 сантіметрів кожний та взявши точки E, F, G та H за вершки цих трикутників.

На рисункові 60-му показано діаґрамму правильної шостистінної піраміди. На цьому рисункові показано між иншим ще один спосіб рисування правильного шостикутника, відмінний від того способу, який подано на рисункові 55му (сторінки 92 та 93). Для того спочатку посередині шматка картону завширшки та завдовжки сантіметрів в 45 рисуємо правильний (рівнобічний) трикутник ABC (Рис. 60), з боками в 30 сантіметрів кожний; поділяємо кожен з боків цього трикутника на три рівні частини в точках D, E, F, G, H та K; сполучаємо простими лініями точки D та E, F та G, H та K і маємо правильний шостикутник $DEFGHK$, котрий буде основою піраміди. Далі проводимо лінії LP, MQ та NK і від кожного бока шостикутника відмірюємо по цих лініях відтинки в 12 сантіметрів кожний, кінці цих відтинків L, M, N, P, Q та R сполучаємо з вершками шостикут ника і маємо шість однакових рівнораменних трикутників, які і будуть бічними стінами піраміди.

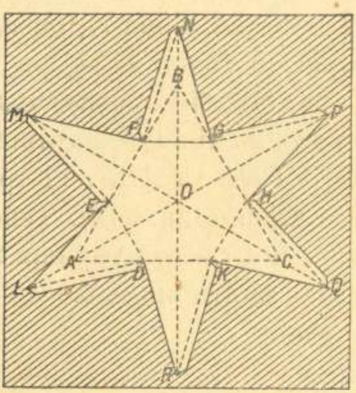


Рис. 60. Діаґрамма правильної шостистінної піраміди. (В зменшеному вигляді.)

На рисункові 61-му показано ще діаґрамму моделі неправильної піраміди, яка має основою прямокутник 20 сантіметрів завдовжки та 10 сантіметрів завширшки. Як бачимо, у цієї піраміди бічні стіни не всі однакові, а однакові подвоє (Рис. 61). Та рамена у всіх чотирьох трикутників повинні бути однакові завдовжки, бо вони мають подвоє зіходитись в один руб. Будування цієї діаґрамми легко зрозуміти по рисункові.

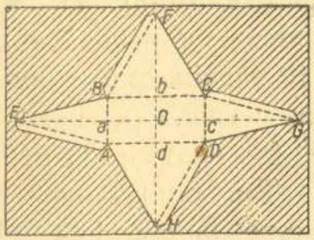


Рис. 61. Діаґрамма піраміди з прямокутною основою. (В зменшеному вигляді.)

Бічна поверхня піраміди. Бічна поверхня піраміди складається з усіх трикутників, які служуть бічними стінами піраміди. Значить, щоб обрахувати поле бічної поверхні піраміди, треба обміряти та обрахувати поле кожної з бічних стін та потім числа, що визначають ті поля, сполучити в одно число, яке і буде визначати поле бічної поверхні піраміди в тих самих квадратових мірах, в яких обміряно поле кожної бічної стіни. Доки піраміда правильна, то треба обміряти та обрахувати поле одної тільки бічної стіни, а потім число, що визначає те поле, намножити на число усіх бічних стін піраміди, бо, як ми уже знаємо, у правильної піраміди усі її бічні стіни суть однакові (рівні проміж собою) трикутники.

Щоб обрахувати повну поверхню піраміди, треба до поля її бічної поверхні додати поле основи, обрахувавши його окремо.

Для прикладу обрахуємо поле бічної поверхні правильної чотиристінної піраміди, якої діаґрамму ми подали на рисункові 59^му (стор. 99). Бік AB квадрата $ABCD$ (Рис. 59) служить основою трикутника AEB і має довжини 10 сантіметрів; лінія aE, яку ми відміряли в 12 сантіметрів, є вишина того самого трикутника; значить поле цього трикутника має в собі: $(10 \times 12):2 = 120:2 = 60$ квадратових сантіметрів. Це і є поле одної з бічних стін піраміди; позаяк таких стін піраміда має чотирі, то її бічна поверхня має в собі: 60 кв. сант. $\times 4 = 240$ квадрат. сантім. Коли хочемо обрахувати повну поверхню піраміди, то до цих 240 кв. сант. мусимо додати ще поле основи; ця основа у нашої піраміди є квадрат з боком в 10 сантіметрів, тому його поле має: $10 \times 10 = 100$ кв. сантіметрів, а значить повна поверхня піраміди має в собі: 240 кв. сант. + 100 кв. сант. = 340 кв. сант.

Так само можна обрахувати бічну поверхню правильної шостистінної піраміди, діаґрамму котрої подано на рисункові 60$^{\text{му}}$ (стор. 100). Тільки тут доведеться намножати число, що визначає поле бічної стіни, не на 4 а на 6.

Обрахуєм ще поле бічної поверхні чотиристінної піраміди, якої діаґрамму подано на рисункові 61$^{\text{му}}$ (стор. 93). Ця піраміда уже неправильна, бо має своєю основою не правильний чотирикутник (то б то квадрат), а прямокутник. Як бачимо на рисункові діаґрамми (Рис. 61), два більші трикутники однакові між собою, а два менші — між собою. Основа *BC* більшого трикутника має 20 сантіметрів, його вишина — 20 сантіметрів, значить його поле має: $(20 \times 20) : 2 = 400 : 2 = 200$ кв. сантіметри. Основа меншого трикутника має 10 сантіметр., його вишина — 22 сантіметри, значить його поле має: $(10 \times 22) : 2 = 110$ кв. сантіметра. Поле обох трикутників разом має: 200 кв. сант. + 110 кв. сант. = 310 кв. сантім. Це є половина усієї бічної поверхні, а значить, уся бічна поверхня має в собі: 310 кв. сант. $\times 2 = 620$ кв. сантіметрів. Щоб обрахувати повну поверхню, треба до цих 620 кв. сантіметрів додати поле прямокутника, який служить основою піраміди; позаяк його довжина 20 сантіметрів, а ширина 10 сантіметрів, його поле має в собі: $20 \times 10 = 200$ кв. сантіметрів, а тому повна поверхня піраміди має: 620 кв. сантім. + 200 кв. сантім. = 820 кв. сантім.

Обєм піраміди. Коли б ми зробили з картону моделі піраміди та призми з однаковим числом бічних стін та ще так, щоб у піраміди та у призми були зовсім однакові їх основи та їх вишини, та наповняючи, через незаклеяну основу, піском піраміду, стали пересипати той пісок у призму, теж через незаклеяну основу, то ми б побачили, що для того, щоб наповнити призму, нам довелося б висипати в неї пісок з наповненої піраміди як-раз три рази. Ми могли б так зробити з пірамідами та призмами з усяким числом бічних стін і наслідок такої спроби був би той самий. З того ми побачили б, що обєм піраміди в три рази менший обєму призми, яка має таку саму основу і таку саму вишину, як і піраміда. Значить, знаючи, як обраховується обєм призми (дивись сторінку 94, пункт 7), ми легко можимо обрахувати обєм піраміди. Для того треба вести обрахунок так, ніби нам треба обрахувати обєм призми, яка має таку саму основу і таку саму вишину, як і піраміда, а потім те число, яке визначатиме обєм такої призми, поділити на 3. Значить, *щоб обрахувати обєм піраміди, треба число квадратових мір її основи намножити на число відповідних лінійних мір її вишини і добуток від того множення поділити на 3; число, яке таким чином дістанемо, і буде визначати обєм піраміди в відповідних кубних мірах.* Цей обрахунок робиться однаково для пірамід правильних і неправильних. Коли назвемо число кубних мір в обємі піраміди V, число відповідних квадратових мір в її основі — S, а число відповідних лінійних мір в вишині піраміди — H, то матимемо:

$$V=(S\times H):3, \text{ або } V=\frac{S\times H}{3}$$

Для прикладу обрахуємо обєм чотиристінної піраміди, котрої діаґрамму подано на рисункові 61-му. Поле її основи має в собі: $20 \times 10 = 200$ квадр. сантім.; її вишина має 17 сантіметрів; значить, її обєм має в собі: $(200 \times 17) : 3 = 3400 : 3 = 1133\frac{1}{3}$ кубних сантіметрів.

Задачі на обрахунок.

11. Треба обцементувати бассейн, який має форму правильної шостистінної призми глибиною в 4 аршини; кожний з боків основи має 2 аршини довжини. Скільки пудів цементу треба для цього, коли на кожний квадратовий аршин поверхні бассейна треба 5 фунтів цементу? (Відповідь: 6 пудів.)

12. Скільки сухої фарби треба для того, щоб пофарбувати на башті покрівлю, яка має форму правильної чотиристінної піраміди, коли нам відомо, що бік її основи має 2 метри, а вишина кожної з бічних стін має 5 метрів та що 1 кілоґрамм сухої фарби вистачає на 10 квадратових метрів? (Відповідь: 2 кілоґрамми.)

13. Скільки кілоґраммів важить залізна трьохстінна призма, яка має основами прямокутний трикутник з прямками (катетами) в 10 сантіметрів кожна і якої вишина — 25 сантіметрів, коли відомо, що 1 кубний сантіметр заліза, з якого зроблено призму, важить 8 ґраммів? (Відповідь: 10 кілоґраммів.)

14. В стародавні часи, ще за кілька сот років до народження Христа, єгипетські царі, або фараони мали звичай наказувати будувати їм надгробні пам'ятники ще за їх життя. Ті пам'ятники будувались завжди в формі пірамід, і де-які з них збереглися в Єгипті аж до наших днів. Найбільша з таких пірамід в Єгипті має основою квадрат з боками в 213 метрів кожний; вишина її 154 метрів. Який її обєм? (Відповідь: 2328942 куб. метр.)

---

12. Цілiндр.

Досі ми розглядали ґеометричні тіла, яких поверхня складається тільки з плоських поверхень, то б то стін. Та часто ми можемо бачити тіла, яких або вся їх поверхня крива, або якась її частина є крива поверхня. Наприклад, у такого ґеометричного тіла, яке має форму м'яча, уся його поверхня крива, а у такого, яка має форму качалки, його бічна поверхня крива, а на кінцях воно може бути обмежене і площинами або плоськими поверхнями. Про ріжницю між плоськими та кривими поверхнями, ми уже говорили (сторінки 17 та 18) і тому ми просто перейдемо до розгляду де-яких ґеометричних тіл з кривими поверхнями. Почнемо з тіла, яке зветься: ціліндр.

Коли взяти шматок картону прямокутної форми та, згорнувши його так, щоб його два краї зійшлися до купи, зклеяти ті два краї, то згорнутий таким способом та зклеяний шматок картону і уявить собою бічну поверхню ціліндра. По краям цієї поверхні матимемо дві круглі дірки; коли ці дві дірки як-небудь заклеяти двома кружалами з картону, то матимемо тіло, обмежене кривою поверхнею та двома площинами в формі кругів, які суть його горішня та спідня основи; це тіло й буде ціліндр, або точніще *круговий ціліндр,* позаяк його обидві основи суть круги. Ми часто бачимо тіла, які мають форму кругового ціліндра: *колони* ріжних великих будинків, наприклад церков, вали машин, часом і просто деревянні колоди, обтесані та рівненько зпиляні, — мають цю форму. На рисункові 62-му намальовано модель кругового ціліндра так, ніби ми дивимось на неї збоку, і тому горішню основу намальовано так, як вона нам наказувалась би, то б то не правильним кругом, а ніби зтиснутим з боків. Колиж дивитися на основу, поставивши її як-раз проти очей, то вона покажеться правильним кругом, як то нарисовано на рисункові 63-му. Обвід цієї частини площі, яку ми звемо кругом, то б то та крива лінія, яка обмежує круг, зветься: *коло.* Значить бічна поверхня ціліндра є крива

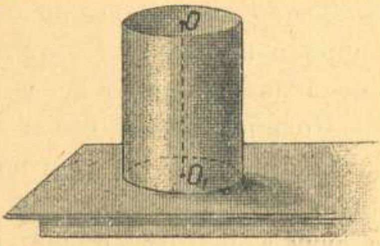


Рис. 62. Круговий ціліндр.

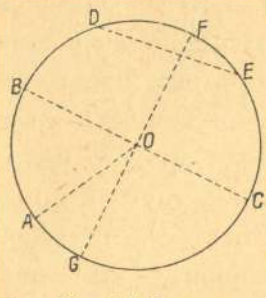


Рис. 63. Круг.

поверхня, і коли б ми схотіли до неї щільно притулити руб лінійки, то це можна зробити, кладучи лінійку тільки в одному напрямку. Основи горішня та спідня суть площі й у нашого цiліндра мають форму однакових кругів, тому такий цілiндр звуть круговим цiлiндром. Площі обох основ між собою рівнобіжні. Коли уявити просту лінію, яка сполучала б центри горішньої та спідньої основи, то така лінія буде простопадною до обох основ. Її звуть: *вісь* кругового цiлiндра або його вишина. Ті лінії на бічній поверхні цілiндра, по яким треба прикладати руб лінійки, щоб він усіми своїми точками прилягав до тієї поверхні, рівнобіжні з вісью цiлiндра і однакові з нею довжиною, тому замісць довжини осі або вишини цiлiндра можна обміpювати довжину котрої-небудь з таких ліній.

Тепер звернімося до основи цілiндра. Дещо ми уже говорили про коло та круг (дивись стор. 69), то тут ми побалакаємо ще про це докладніше.

Попереду всього зазначимо ріжницю між цими двома назвищами: *коло* та *круг* або кружало. *Колом* ми звемо саму *криву лінію* або самий обвід, а *кругом* ми звемо ту *частину площі*, яку обмежує коло. Коло є замкнена крива лінія і тому не має ні початку ні кінця; або ще можна сказати, що кожну точку кола можна брати і за початок його і разом за його кінець.

В середині кожного круга є одна така точка, яка однаково віддалена від кожної точки кола того круга: ця точка зветься: *центр круга*, або *центр кола*. Це є та сама точка, в яку ми ставимо одну з ніжок циркуля, коли другою обкреслюємо коло. На рисункові 63-му центром круга є точка O. Кожна лінія, наприклад лінія OA (Рис. 63), яка сполучає центр кола з якого-небудь точкою на ньому, зветься: *луч* або *радіус кола*, а також луч або радіус круга. Очевидячки, таких радіусів чи лучів ви можете провести, скільки хочете. Від довжини луча залежить і довжина кола, яке описано тим лучем: що довший візьмемо луч, то більший буде і круг.

Проста лінія, яка сполучає дві точки кола, проходячи через центр, наприклад лінія BC (Рис. 63), зветься *поперечник* або *діаметр* кола, а також поперечник або діаметр круга. На рисункові можна бачити (Рис. 63), що поперечник складається з двох лучів (OB та OC), випростаних в-одну просту лінію; тому довжина поперечника як-раз у два рази більша ніж довжина луча. Наприклад, коли луч чи радіус кола має 2 сантіметри довжини, то поперечник, чи діаметр того самого кола має 4 сантіметри, коли луч — 3 сантіметри, то поперечник — 6 сантіметрів, коли поперечник 10 сантіметрів, то луч — 5 сантіметрів і так далі.

Проста лінія, яка сполучає дві точки кола, не проходячи через центр, як наприклад лінія DE (Рис. 63), зветься: *тятива*. Частина кола зветься *дугою кола*; наприклад частина кола, що міститься угорі між точками D та E (Рис. 63), є дуга кола, а проста лінія DE є тятива цієї дуги (або ще кажуть: хорда дуги). Всякий поперечник або діаметр є тятива півкола і разом з тим є найдовша з усіх тятив, які можна провести в колі. Тому легко можна обміряти поперечник навіть у такого круга, у якого незазначено центра, як наприклад поперечник рівно відпиляної круглої колоди, або поперечник монети і таке инше. Для того досить тільки визначити довжину найдовшої тятиви у того кола — то й буде довжина поперечника.

Так само легко знайти центр у такого круга, де його не зазначено. Для того треба виміряти в якім небудь напрямку найдовшу тятиву та під лінійку накреслити її на тому кругові крейдою, вуглем або олівцем, — це буде один з поперечників; так само накреслимо ще один поперечник уже в другім напрямку. Позаяк ми знаємо, що усі поперечники, які б ми не провели в кругові, мусять проходити через його центр і позаяк тією точкою, через яку проходять обидва накреслені нами поперечники, є точки їх перетину, то, значить, ця точка і є центр круга а також центр і кола того круга.

Всякий поперечник круга поділяє його поле на дві рівні частини, а своїми двома кінцями поділяє також на дві рівні частини коло. (Наприклад поперечник *BC* або *FG* на рисункові 6 -му). Два поперечники один до другого простопадні (перпендікулярні) поділяють поле круга, а своїми кінцями коло того круга на чотирі рівних частини (поперечники *BC* та *FG* на рисункові 63-му).

Довжина кола. Нарисуймо на досить грубому картоні три кола, одно радіусом (лучем) в 35 мілліметрів, друге — в 56 мілліметрів і третє — в 70 мілліметрів. Значить, поперечник першого кола матиме довжини 70 мілліметрів (35 міл. × 2 = 70 міл.), поперечник другого — 112 мілліметрів (56 міл. × 2 = 112 міл.), а поперечник третього — 140 мілліметрів (70 міл. × 2 = 140 міл.). Тепер викраймо ті три круги, ретельно дбаючи, щоб краяти як-раз по лінії кола кожного круга. Потім до того візьмімо мотузок, або ще краще вузеньку стьожечку з якоїсь матерії, та, обвівши нею по колу кожного круга, виміряймо ті три кола, прикладаючи кожного разу той кінець мотузка чи стьожки, який визначає довжину кола, до мірки з мілліметрами. Коли у нас є мірка з мілліметрами паперова або з якоїсь матерії, то можна обміряти довжину тих трьох кол просто тією міркою. Обмірявши так чи инакше ті три кола, ми побачимо, що довжина першого, з поперечником в 70 мілліметрів, має в собі 220 мілліметрів, довжина другого, з поперечником в 112 мілліметрів, має — 352 мілліметри, а довжина третього, з поперечником в 140 мілліметрів, має — 440 мілліметрів. Коли тепер ми порівняємо довжину кожного кола з довжиною його поперечника, то побачимо, що довжина кожного кола має в собі три цілих та одну сьому частину ($3\frac{1}{7}$) довжини поперечника. Скільки б таким способом, або й яким иншим, ми не обміряли кол і їх поперечників, ми знайшли б, що всяке коло має таку довжину, яку складають три його поперечники та ще одна сьома частина його. Значить, коли ми знаємо довжину поперечника, то ми легко можемо обрахувати довжину самого кола, — для того треба тільки число, яке визначає довжину поперечника в яких небудь мірах, взяти три рази та до того числа, яке таким чином дістанемо, додати ще сьому частину числа мір в поперечнику. Або коротше кажучи, — *щоб обрахувати довжину кола, треба число мір в його поперечникові намножити на* $3\frac{1}{7}$. Можна обраховувати ще й так: один цілий поперечник має в собі сім своїх сьомих частин, а, значить, три поперечники мають тих сьомих частин в три рази більше, то б то 21 ($7 \times 3 = 21$), а коли додамо сюди ще одну сьому, то матимемо всього 22 сьомих частини поперечника ($\frac{22}{7}$), — ці 22 сьомих частини поперечника і складають довжину цілого кола. Значить, коли візьмемо одну сьому частину ($\frac{1}{7}$) числа мір в поперечнику, для чого те число треба поділити на 7, а потім число, яке дістанемо після цього поділу, візьмемо 22 рази, то б то намножимо його на 22, то й матимемо довжину кола в тих самих мірах, якими ми міряли поперечник.

Навпаки, коли ми знаємо довжину кола, то ми легко можемо обрахувати довжину його поперечника: *для того треба число мір в довжині кола поділити на* $3\frac{1}{7}$ *або на* $\frac{22}{7}$. Обрахунок можна вести ще й так: позаяк довжина кола має в собі 22 сьомих частини ($\frac{22}{7}$) довжини поперечника, то коли число мір в довжині кола поділимо на 22, то матимемо число мір в довжині сьомої частини ($\frac{1}{7}$) поперечника, а коли це останнє число візьмемо 7 раз, то б то намножимо його на 7, то дістанемо число, що визначає довжину поперечника в тих самих мірах, якими обміряно довжину кола. Коли означити число якихсь мір в колі літерою C, число таких самих мір в його поперечнику — D, то можна написати $C = D \times 3\frac{1}{7}$. Коли означити число мір в лучі літерою R, тоді число таких самих мір в поперечнику буде $R \times 2$, а значить, тоді можна написати так: $C = (R \times 2) \times 3\frac{1}{7}$.

Зробимо тут такі задачі на обрахування довжини кола по довжині його поперечника та на обрахування поперечника по довжині самого кола.

Задача I. Знайти довжину кола, описаного лучем в 14 сантіметрів.

Позаяк луч (радіус) кола має 14 сантіметрів, то його поперечник, котрого довжина в два рази більша ніж луча, має: 14 сант. $\times$ 2 = 28 сантіметрів. Одна сьома частина ($\frac{1}{7}$) цього числа буде: 28 сантім. : 7 = 4 сантіметри, а 22 сьомих частини його ($\frac{22}{7}$) буде: 4 сант. $\times$ 22 = 88 сантіметри, — це й є довжина кола.

Задача II. Знайти довжину поперечника кола, яке само має довжини 44 сантіметрів.

44 сантім. : 22 = 2 сантіметрів, — це є довжина однієї сьомої частини ($\frac{1}{7}$) поперечника. Значить, довжина цілого поперечника буде: 2 сантіметри $\times$ 7 = 14 сантіметри.

Коли б ми захотіли ще знайти й довжину луча кола, яка є половина довжини поперечника, то треба тільки 14 поділити по полам: 14 сант. : 2 = 7 сантіметрів, — це й є довжина луча.

Коли нам немає потреби обраховувати довжину кола дуже точно, то можно брати, що вона має в собі рівно три довжини поперечника, значить, для такого обрахунку нам доведеться намножати число мір в поперечнику просто на 3. Звичайно при такому обрахункові ми матимемо тільки приближну довжину кола, та помилка не буде дуже великою. Так само й при обрахункові довжини поперечника по довжині кола можна число мір в довжині кола просто ділити на 3. Щоб бачити, яка походить від того ріжниця в обрахункові, зробимо по цьому способу обрахунок для тих двох задач, які ми оце були зробили. Довжина кола, якого поперечник 28 сантіметрів, буде: 28 сант. $\times 3 = 84$ сантіметри. А ми раніш знайшли точніше ту довжину в 88 сантіметрів; значить, ріжниця є в 4 сантіметри. Для другої задачі маємо: довжина поперечника кола довжиною в 44 сантіметри буде: 44 сантім. : $3 = 14\frac{2}{3}$ сантіметри. А ми раніш знайшли ту довжину в 14 сантіметрів, значить, ріжниця є в $\frac{2}{3}$ сантіметра.

Поле круга. Круг, як і всяка инша замкнена фігура, має своє поле, яке можна обмірювати квадратовими мірами. Для того, як і при обмірюванні багатьох инших замкнених фігур, нам зовсім не треба обмірювати те поле безпосередньо якимсь небудь квадратом, а досить, як ми те побачимо, обміряти звичайною якою-небудь лінійною мірою його поперечник, (або луч) а потім зробити відповідний обрахунок, щоб дістати число, яке в квадратових мірах визначатиме поле круга. Тут ми і розглянемо той спосіб, яким це звичайно робиться. Нарисуймо круг з центром у точці O (Рис. 64), а в середині його правильний восьмикутник так,

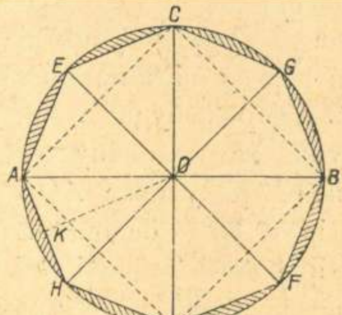


Рис. 64.

щоб усі його вісім вершків лежали на колі круга. (Це зветься вписати в коло правильний восьмикутник.) Це треба робити так: проводимо два поперечники *AB* та *CD* (Рис. 64) взаємно простопадні, сполучаємо їх кінці простими лініями — маємо квадрат *ACBD;* провадимо ще два поперечники *EF* та *GH* простопадно до боків квадрата. Ці два поперечники будуть теж взаємно простопадні і поділять боки квадрата пополам. Кінці проведених таким способом поперечників поділять ціле коло на 8 рівних частин в точках: *A, E, C, G, B, F, D* та *H*. Коли сполучимо ці точки простими лініями то й матимемо вписаний в коло правильний восьмикутник *AECGBFDH*. Тепер розміркуємо, як обрахувати поле цього правильного восьмикутника. Позаяк своїми діагоналями він розбивається на вісім рівних між собою трикутників, то для того, як ми уже знаємо (стор. 88), треба тільки обрахувати поле одного з тих трикутників, а потім число, що визначає те поле в якихсь квадратових мірах, взяти вісім раз, то б то намножити на 8. Щоб обрахувати поле одного з тих трикутників, наприклад трикутника *AOH*, треба число мір в його основі, за яку найкраще взяти його бік *AH*, намножити на число мір в його вишині, якою буде лінія *OK*, простопадна до *AH*, а добуте від того множення число поділити на 2. Замісць того, щоб ділити на два уже добуток від множення тих двох чисел, можна попереду ніж намножати одно на друге, поділити на 2 котре-небудь з них і потім одно число намножити уже на половину другого. Значить, щоб обрахувати поле трикутника *AOH*, можна зробити ще й так: число мір в його основі *AK* намножити на половину числа мір в його вишині *OK*, число яке таким чином добудемо, визначатиме поле трикутнина *AOH* в відповідних квадратових мірах; це число треба взяти 8 раз, то б то намножити на 8, шоб добути число, що визначатиме поле нашого правильного восьмикутника. Замісць того, щоб намножати на 8 уже добуток від множення, можна попереду намножити число мір в боці AH, а потім те число, що таким чином добудемо, намножити вже на половину числа мір в вишині OK, число яке таким чином добудемо, буде так само визначати число відповідних квадратових мір в полі правильного восьмикутника. Та коли ми намножимо число мір в боці AH на 8, то число, яке добудемо, визначатиме ніщо инше як число мір в довжині обводу (періметра) правильного восьмикутника: Вишина ж OK трикутника проходить через середину основи AH, як це буває у всякого рівнораменного трикутника; значить, лінія OK є та, по якій треба міряти віддалення середини бока правильного восьмикутника від його центра. Тому можна сказати, що для того, *щоб обрахувати поле правильного восьмикутника* (як і всякого иншого правильного многокутника) *треба число мір в його обводі намножити на половину числа, яке визначає віддалення середини кожного його бока від його центра.*

Коли назвемо число квадратових мір в полі правильного многокутника літерою S, число відповідних лінійних мір в його обводі — P, а число, що визначає в тих самих лінійних мірах віддалення середини кожного з його боків від його центра — n, то можемо написати:

$$S = P \times \frac{n}{2}, \left(\text{або } S = \frac{P \times n}{2}\right)$$

Як можемо бачити на рисункові 64-му, обвід нашого правильного вписаного восьмикутника по своїй довжині близький до самого кола; так само лінія, по якій треба міряти віддалення середини кожного бока восьмикутника до його центра теж близька по довжині до луча кола, тому коли, обрахувавши таким чином поле нашого правильного вписаного восьмикутника (рис. 64), візьмемо це поле за поле круга, в який вписано цей восьмикутник, то помилка буде невелика, бо поле восьмикутника ріжниться від поля круга тільки на сумму піль тих частин круга, які на нашому рисункові замальовано скісними лініями. Та проте такий обрахунок поля круга бувби неточний, бо всеж таки ріжниця між полем круга та полем восьмикутника помітна просто наоко. Тому, коли б ми хотіли обрахувати поле круга точніше, то мусіли б взяти замісць його поля, поле правильного вписаного в нього многокутника з числом боків, більшим ніж 8, — наприклад з 16ма боками, або й з 32ма. Що з більшим числом боків братимемо правильний вписаний в круг многокутник, то ближче буде його поле до поля самого круга, а разом і обвід його буде ближче до обводу самого круга, то б то до його кола, а лінія віддалення середини кожного його центра буде ближче до луча круга. Коли ж в обрахункові поля круга замісць довжини обводу якогось правильного вписаного многокутника взяти довжину самого кола того круга, а замісць довжини лінії віддалення середини бока многокутника до його центра взяти довжину луча круга, тоді обрахунок поля круга буде зовсім точний. Тому можна сказати, що для того, *щоб обрахувати тожно поле круга в яких-небудь квадратових мірах, треба число відповідних лінійних мір в його колі намножити на половину числа таких самих мір в його лучі.*

Значить, коли назвати число квадратових мір в полі круга літерою K, а число відповідних лінійних мір в його лучі — R, то довжина його кола буде: $(R \times 2) \times 3\frac{1}{7}$ (стор. 113), а значить для поля круга можна написати:

$$K = [(R \times 2) \times 3\tfrac{1}{7}] \times \frac{R}{2}.$$

В цьому обрахункові можна де-що скоротити, а саме: обраховуючи попереду довжину кола, нам доводиться намножати число довжини його луча на 2, щоб мати число довжини поперечника. потім для обрахунку поля круга нам доводиться намножати число довжини кола на половину числа довжини луча, длячого раніш ніж множити нам доводиться це число поділити на 2. Отже результат обрахунку поля круга буде той самий, коли ми при обрахункові довжини кола число довжини луча не будемо намножати на 2, а зате при обрахункові вже поля круга також не будемо і ділити на 2 того самого числа довжини луча. В такім разі обрахунок того поля можна написати так:

$$K = [R \times 3\tfrac{1}{7}] \times R$$

А позаяк однаково, чи намножити попереду R на $3\frac{1}{7}$, а потім здобуток намножити на K, чи намножити R попереду на R, а потім здобуток — на $3\frac{1}{7}$, то можна ще написати і так:

$$K = (R \times R) \times 3\tfrac{1}{7}, \text{ (або } K = R^2 \times 3\tfrac{1}{7}\text{)}$$

Тоді можна сказати, що *для того, щоб обрахувати поле круга в яких-небудь квадратових мірах, треба число відповідних лінійних мір в його лучі намножити само на себе, а здобуток намножити ще на* $3\frac{1}{7}$.

Само собою розуміється, що в тих випадках, коли ми не потрібуємо обраховувати поле круга точно, можна здобуток від множення числа мір в лучі круга самого на себе намножати просто на 3.

Обрахуємо тут для прикладу поле круга, якого луч має 35 сантіметрів довжини. Для того треба спочатку число 35 намножити само на себе, маємо: $35 \times 35 = 1225$; тепер число 1225 треба намножити на $3\frac{1}{7}$ (або на $\frac{22}{7}$) для того треба його намножити попереду на 22, а добуток поділити на 7 (або попереду поділити його на 7, а потім число, яке дістанемо, намножити на 22). Отже маємо:

$1225 \times 3\frac{1}{7} = (1225 \times 22) : 7 = 26950 : 7 = 3850$ квадратових сантіметрів — це й є поле нашого круга.

Якби нам треба було обрахувати це поле тільки приблизно, то ми б просто число 1225 намножили на 3; отже мали б:

$1225 \times 3 = 3675$ кв. сантіметрів, що ріжниться від попереднього числа на 175 кв. сантіметрів.

Задачі на обрахунок.

15. Треба обкопати ровом місце в формі круга, з поперечником в 104 аршинів. Скільки треба буде заплатити за роботу, коли за 1 погонний аршин платити по 1 карб. 50 копійок, коли обмірювати довжину того рова по середньому його колові і коли ширина його має бути 2 аршини? (Відповідь: 495 карбованц.)

16. Скільки ґраммів насіння треба для того, щоб засіяти травою місце круглої форми з поперечником в 42 метри, коли засівати по 2 ґрамми на кожний квадратовий метр? (Відповідь: 2772 ґрамма, або 2 кілограмма 772 ґрамма.)

17. Щоб окреслити велике коло на землі, роблять так: в тім місці, де має бути центр того кола, забивають кілочок, на нього петлею накидають шворку, потім відмірявши по тій шворці від кілочка довжину, яку повинен мати луч того кола, на кінці тієї довжини до шворки привязують загострений кілочок; натягнувши шворку та обводячи привязаний до неї кілочок круг того, що забито в землю, окреслюють на землі гострим кінцем кілочка коло. Отже таким способом хотять окреслити коло, яке повинно мати 88 метрів довжини. Скільки метрів треба для того відміряти від одного кілочка до другого? (Відповідь: 14 метрів.)

Діаґрамма кругового цiлiндра. Для того щоб нарисувати діаґрамму кругового цiлiндра, берем шматок картону (не дуже грубого) прямокутної форми 35 сантіметрів завдовшки (від гори до низу) та 23 сантіметри завширшки (з ліва на право). На віддаленню 11 сантіметрів від лівого краю картону проводимо просту лінію *MN* (Рис. 65) простопадно до горішнього та нижнього країв картону. Відмірявши по цій лінії від горішнього та нижнього країв по 4 сантіметри назна-

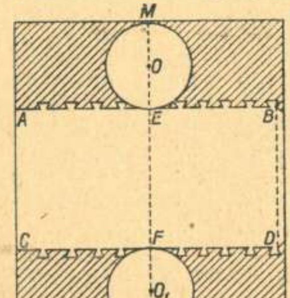


Рис. 65. Діаґрамма кругового цiлiндра. (В зменшеному вигляді.)

чуємо точки O та O_1; взявши ці точки за центри окреслюємо два круги лучами в 35 міллiметрiв (то б то в $3\frac{1}{2}$ сантiметри) довжиною; ці два круги і будуть горiшньою та спiдньою основами цiлiндра. Через точки E та F, в яких кола цих кругiв перетнуть лiнiю OO_1, проводимо лiнiї AB та CD простопадно до лiнiї OO_1 (а значить простопадно i до лiвого та правого краïв картону). Вiдмiрюємо на цих простих лiнiях вiд точок E та F по обидва боки по 11 сантiметрiв до точок A та C з лiвого боку i до точок B та D з правого; сполучаємо простими лiнiями точки A i C та B i D лiнiя AC прийдеться як раз на лiвому краю картону: прямокутник $ABDC$ i буде бiчня поверхня цiлiндра. На горiшньому та на нижньому краях цього прямокутника рисуємо ще по кiлька зубчикiв, якi будуть нам потрiбнi для того, щоб приклеяти горiшню та спiдню основи цiлiндра; так само робимо смужку з одного боку прямокутника (у нас бiля бока BD) для того щоб зклеяти модель. Викраявши цю дiаґрамму, зводимо лiвий та правий краï прямокутника $ABDC$ докупи, зкрутивши його, та зклеюємо цi два краï; потiм того з допомогою зубчикiв приклеюємо горiшню та спiдню основи, i модель готова.

Рисуючи цю дiаґрамму, треба дбати, щоб довжина прямокутника, який є бiчною поверхнею цiлiндра (у нас лiнiï AB та CD) була однакова з довжиною кол тих кругiв, якi будуть служити горiшньою та спiдньою основами цiлiндра. Через те коли ми заранi назначаємо луч або поперечник кожного з цих кругiв, то мусимо обрахувати довжину прямокутника, то б то довжину кожного з кол тих кругiв; а коли заранi назначаємо довжину прямокутника, то б то довжину кожного з кол основ, то мусимо обрахувати той луч, яким треба окреслювати обидва круги. В нашiй дiаґраммi ми собi заранi назначили, що поперешник кожної з основ має бути 7 сантіметрів завдовшки (значить луч має бути завдовшки в $3^1/_2$ сантіметри чи в 35 мілліметрів), Тому нам треба було обрахувати довжину прямокутника *ABDC*, то б то довжину кожного з кол. Ця довжина має в собі: 7 сант. $\times$ $3^1/_2$ = 7 сант. $\times$ $^{22}/_7$ сант. = $\frac{7 \times 22}{7}$ сант. = 22 сантіметри: тому ми й одміряли від точок *E* та *F* по лініям *A B* та *C D* по 11 сантіметрів вліво та вправо (Рис. 65).

Бічна та повна поверхні кругового цілíндра. Бічна поверхня ціліндра, як і всяка инша поверхня має своє поле, яке можна обмірювати квадратовими мірами. На рисункові діаграмми кругового ціліндра (Рис. 65) ми бачимо, що поле бічної поверхні цього ціліндра є поле прямокутника *ABDC*, якого довжина є довжина кола основи ціліндра (горішньої або спідньої, бо вони однакові), а ширина є вишина ціліндра. Щоб обрахувати поле прямокутника, треба число мір в його довжині намножити на число таких самих мір в його ширині, значить, *щоб обрахувати в яких-небудь квадратових мірах поле бічної поверхні кругового ціліндра, треба число відповідних лінійних мір в колі його основи намножити на число таких самих мір в його вишині.*

Щоб обрахувати його повну поверхню, треба до поля бічної поверхні додати ще поля двох його основ.

Для прикладу обрахуймо тут бічну та повну поверхні того ціліндра, діаграмму якого маємо на рисункові 65-му (стор. 122). Луч його основ має в собі 35 мілліметрів, значить поперечник має: 35 міл. $\times$ 2 = 70 мілліметрів = 7 сантіметрів, а коло основи має в собі: 7 сант. $\times$ $3\frac{1}{2}$ = 7 сант. $\times$ $\frac{22}{7}$ = $\frac{7 \text{ сант.} \times 22}{7}$ = 22 сантіметра. Позаяк вишина ціліндра (лінія *EF* на рис. 65-

му) є 20 сантіметрів, то його бічна поверхня має в собі: $22 \times 20 = 440$ квадратових сантіметрів.

Обрахуймо тепер ще його повну поверхню; длятого треба попереду обрахувати поле круга його основи; це поле має в собі: $(3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}) \times 3\frac{1}{7} = (\frac{7}{2} \times \frac{7}{2}) \times \frac{22}{7} = \frac{49}{4} \times \frac{22}{7} = \frac{49 \cdot 22}{4 \cdot 7} = \frac{77}{2}$ квадр. сант. $= 38\frac{1}{2}$ квадр. сантіметр. Два поля (горішньої та спідньої основ) матимуть: $38\frac{1}{2}$ кв. сант. $\times 2 = 77$ кв. сантім. Ці 77 кв. сант. треба додати до 440 кв. сант. бічної поверхні, щоб мати поле повної поверхні; значить це поле має 440 кв. сант. $+$ 77 кв. сант. $=$ 517 кв. сантіметрів.

Обєм кругового цілiндра. Обєм кругового цiлiндра обраховується зовсім так само, як і обєм призми (стор. 94). Тоб то, *щоб обрахувати обєм кругового цiлiндра в яких-небудь кубних мiрах, треба число вiдповiдних квадратових мiр в його основi намножити на число вiдповiдних лiнiйних мiр в його вишинi.* Перевiрити цей спосiб обрахування обєму цiлiндра можна так само, як ми вже те описували, коли говорили про обрахування обєму призм (стор. 95 та 96), то б то за допомогою картонових кубикiв та пiску або опилок.

Для прикладу обрахуємо тут обєм того цiлiндра, дiаґрамму якого подано на рисунковi 65 (стор. 122). Луч його основи має в собi $3\frac{1}{2}$ сантiметри, значить поле основи має: $(3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}) \times 3\frac{1}{7} = (\frac{7}{2} \times \frac{7}{2}) \times \frac{22}{7} = \frac{49}{4} \times \frac{22}{7} = \frac{49 \cdot 22}{4 \cdot 7} = \frac{77}{2}$ кв. сант $= 38\frac{1}{2}$ кв. сантiметрiв. Позаяк вишина цiлiндра має 20 сантiметрiв, то його обєм має:

$$38\frac{1}{2} \times 20 = \frac{77}{2} \times 20 = \frac{77 \times 20}{2} = 770 \text{ кубних сантiметрiв.}$$

---

13. Конус.

Коли набрати в лійку піску, а потім дати тому піскові висипатись через дірочку на стіл, то той пісок висипавшись утворить купку, яка нагорі сходитиметься в точку, а нанизу розлягатиметься по кругові. З усіх боків та купка буде обмежена однією кривою поверхнею, а зісподу площиною в формі круга. Крива поверхня то буде бічна поверхня купки, а площа її основа. Це є форма геометричного тіла, яке зветься: конус. Позаяк у конуса, про який ми тут говоримо, основа є круг, то він зветься ще й *круговий конус.* Як і у цілиндра, у конуса бічна поверхня така крива поверхня, що до неї можна тільки в однім напрямку притулити щільно руб лінійки. На рисункові 66-му наказано модель конуса. Точка S, в яку збігається нагорі бічна поверхня конуса, зветься його *вершком.* Проста лінія SO, яку можна уявити собі спадаючою з вершка на основу, простопадно до неї, зветься вишиною конуса; у нашого конуса вишина проходить через центр круга, який конус має основою. Кожну з тих простих прямих, які можна провести по бічній поверхні конуса від його вершка до відповідної точки на колі основи, як наприклад лінії SA або SB, ми будемо звати косою вишиною конуса.

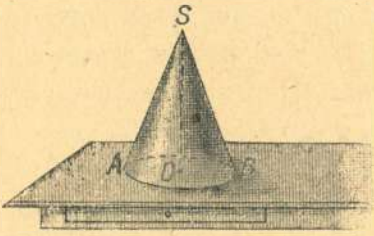


Рис. 66. Круговий конус.

Діаґрамма кругового конуса. Щоб нарисувати діаґрамму кругового конуса, треба взяти шматок картону квадратної форми, сантіметрів в 42 завдовшки та завширшки. Відступивши від горішнього краю картону на 1 сантіметр проводимо просту лінію AB (Рис. 67) і назначуємо посередині неї точку O; з цієї точки, як

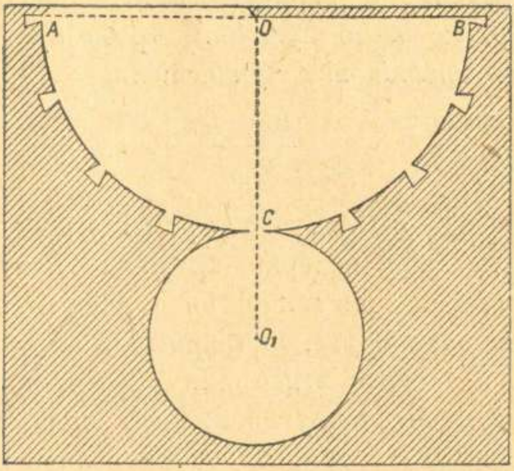


Рис. 67. Діаґрамма кругового конуса. (В зменшеному вигляді.)

з центра описуємо півкола лучем в 20 сантіметрів. З точки O проводимо просту лінію OO_1 простопадно до лінії AB; від точки C, в якій ця лінія перетинається з півколом, відміряємо до точки O_1 10 сантіметрів; берем цю точку за центр і описуємо з неї коло лучем в 10 сантіметрів. Це коло, яке тільки що торкнеться до описаного нами раніш півкола біля точки C, і буде основою конуса. Викраявши діаґрамму, зводимо один з другим края OB та OA, скрутивши півкруга в поверхню конуса і зклеюємо їх потім обережненько так, щоб не одірвати, пригинаємо основу і приклеюємо її за допомогою зубчиків, які зроблено по обводові півкола, — і модель конуса готова.

Довжина півкола повинна бути така сама, як довжина цілого кола основи, бо коли ми скрутимо той півкруг у поверхню конуса, то кінці півкола A і B зійдуться, а лінія півкола скрутиться в коло, яке повинно бути як-раз таке, як і коло основи. Тому саме луч півкола і повинен бути в два рази більший ніж луч основи. Якби замісць півкола ми нарисували для поверхні конуса тільки чвертькола, то луч його треба було б брати у чотирі рази довший, ніж луч основи.

Бічна та повна поверхні кругового конуса. Поле бічної поверхні кругового конуса є, як то можна бачити на рисункові його діаграмми (Рис. 67), поле тієї частини круга, яка призначена для того, щоб скрутивши її зробити з неї бічну поверхню конуса (на нашому рисункові півкруга). Значить поле тієї поверхні треба обраховувати так, як обрахували б ми поле тієї частини круга. На нашій діаграммі (Рис. 67) тією частиною є півкруга. Щоб обрахувати поле того півкруга, міркуємо так: щоб обрахувати поле цілого круга, треба число мір в його колі намножити на число мір в половині його луча; значить, щоб мати поле півкруга, треба взяти половину здобутка від того множення. Та замісць того можна зробити й инакше, а саме: намножити на число мір в половині луча число мір не в цілому колі, а число мір в половині того кола, тоді здобуток від того множення одразу дасть нам поле півкруга в відповідних квадратових мірах. Та, як ми уже знаємо, довжина того півкола однакова з довжиною кола основи, а довжина луча півкола є довжина косої вишини конуса. Значить коли намножимо число мір в колі основи конуса на половину числа таких самих мір в його косій вишині, то здобуток і буде число відповідних квадратових мір в бічній поверхні кругового конуса. Це справедливо не тільки для такого конуса, якого діаґрамму маємо на рисункові 67му, але й для всякого кругового конуса.

Наприклад бічну поверхню того конуса, якого діаграмму ми розглядїли (Рис. 67), обрахуємо так: луч основи його має 10 сантіметрів, значить довжина кола його основи має в собі (10 сант. $\times$ 2) $\times 3\frac{1}{7} =$ 20 сант. $\times$ $\times \frac{22}{7} = \frac{20 \times 22}{7}$ сант. $= \frac{440}{7}$ сант. Позаяк коса вишина конуса має в собі 20 сантіметрів, то бічна поверхня має: $\frac{440}{7} \times \frac{20}{2} = \frac{440}{7} \times 10 = \frac{4400}{7}$ квадр. сант. $= 628\frac{4}{7}$ кв. сант.

Як би ми хотіли обрахувати повну поверхню, то до цих $628\frac{4}{7}$ кв. сант. треба б було ще додати поле основи.

Обєм кругового конуса. Обєм конуса обраховується таким самим способом, як і обєм піраміди. То б то, *щоб обрахувати обєм кругового конуса в яких-небудь кубних мірах, треба число відповідних квадратових мір в його основі намножити на число відповідних лінійних мір в його вишині (прямій) і потім здобуток поділити на 3.* Перевірити це можна тим самим способом, про який ми згадували, коли говорили про способи обрахунку обємів призм (стор. 95 та 96) та обєма ціліндра (стор. 126).

Для прикладу обрахуймо обєм конуса, котрого діаграмму подано на рисункові 67^{му}. Луч його основи має 10 сантіметрів, значить поле основи має: $(10 \times 10) \times 3\frac{1}{7} =$ $= 100 \times \frac{22}{7} = \frac{2200}{7}$ кв. сант. Позаяк вишина (пряма) його має 14 сантіметрів, обєм його має в собі:
$\frac{2200}{7} \times 14) : 3 = \frac{2200}{7} \times 14 : 3 = 4400$ кубних сантім. $: 3 =$ $= 1466\frac{2}{3}$ кубних сантіметрів. З попереднього виходить, що обєм кругового конуса є третина обєму кругового ціліндра, який має таку саму основу та таку саму вишину, як і конус.

Задачі на обрахувок.

18. Скільки потрібно кілоґраммів листового заліза для круглої ціліндрічної труби 5 метрів завдовшки та з поперечником в 14 сантіметрів, коли 1 квадратовий метр того заліза важить $2\frac{1}{2}$ кілоґрамма? При обрахункові не брати на увагу тієї кількости заліза, яка піде на те, щоб зточувати окремі листи і яку можна прикинути потім до результата обрахунка. (Відповідь: $5\frac{1}{2}$ кілоґраммів або 5 кілоґраммів та 500 ґраммів.)

19. Скільки фунтів сухої фарби треба для того, щоб пофарбувати покрівлю, яка має форму кругового конуса, котрого коса вишина 16 аршин, а поперечник основи 7 аршин, коли на 1 квадратовий аршин потрібно $\frac{1}{8}$ фунта фарби? (Відповідь: 22 фунта.)

20. Шклянка, яка має форму кругового ціліндра з поперечником основи в 56 мілліметрів до половини наповнена водою. Туди вкинуто 2 однакових срібних монет, від чого рівень води в шклянці піднявся на 3 мілліметра. Який обєм кожної тих монет? (Відповідь: 3696 кубних мілліметрів.)

21. По обох боках залізного вала, який має форму кругового ціліндра 2 метри довжини, з поперечником основи в 14 сантіметрів, виточено 2 однакових ямки в формі кругового конуса так, що центри основ тих конусів і їх вершки лежать на осі вала. Поперечник основи кожного конуса має 12 сантіметрів, а вишина (пряма) його (то б то глибина ямки, коли міряти її від центра основи до вершка конуса) 7 сантіметрів. Скільки важить вал, коли 1 кубний сантіметр заліза, з якого його зроблено, важить 8 ґраммів? (Відповідь: 242 кілоґрамма, 176 ґраммів.)

Оглав.

Т-во „Дзвін“.

Видавництво **„Українська Школа“** під редакцією С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка.

Видало такі підручники:

Я. Чепіга. Задачник для початкових шкіл, рік перший. Видання 3-є.

Його-ж. Задачник для початкових шкіл. Рік II. Видання 3-є.

Його-ж. Задачник для початкових шкіл. Рік III.

Його-ж. Аритметичні правила, для початк. шкіл. Вид. 2-є.

Його-ж. Букварь для дорослих.

Його-ж. Читанка для дорослих.

С. Черкасенко. Початок. Граматка. Видання 3-є.

Його-ж. Рідна школа. Читанка, ч. I. Видання 3-є.

Його-ж. Рідна школа. Читанка, ч. II. Видання 2-е.

Його-ж. Рідна школа. Читанка ч. III і IV.

Його-ж. Найпотрібніші правила правопису. Частина I і II.

О. Коваленко. Ґеометрія для вищих шкіл початкових і перших кляс шкіл середніх, ч. I.

Його-ж. Ґеометрія для вищих шкіл початкових і перших кляс шкіл середніх, ч. II.

В. Олійник. Курс природознавства, ч. I. (Нежива природа.)

Юр. Сірий. Про світ Божий. (Бесіди по природознавству.) Видання 2-е.

Його-ж. Життя ростин. (Анатомія і фізіольоґія ростин.) Видання 2-е.

Головний склад міститься в Київі, Бесарабська площа, ч. 2.

Т-во „Дзвін“.

Друк Кароля Ґорішека, Відень IX. — 18 2147.

Видавництво „Українська школа“ у Київі.

Головний склад: Київ, Бесарабська площа ч. 2, Т-ва „Дзвін“.

Ціна 7 гривень (3½ карб.).