К. ЛЕБЕДИНЦІВ.

ЛІЧБА Й МІРА

АРИТМЕТИКА

В ЗВЯЗКУ З ПОЧАТКАМИ ГЕОМЕТРІЇ.

ДЛЯ ТРУДОВОЇ ШКОЛИ АБО САМОНАВЧАННЯ.

ч. II.

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО
КИЇВ — 1922 р.

Друковано 10.000

Зам. 40.

КИЇВ.

Трест „Київ—Друк“—8-ма Державна друкарня (вул. Толстого, 5).

л. ц. 1922.

Відділ I.

Вступні відомости про дроби. Усні обчислення з найпростішими дробовими числами.

§ 1. Долі одиниці. Дроби.

Нехай нам треба розділити аркуш паперу порівну двом хлопчикам; ми розріжемо тоді цей аркуш на дві однакові частини й кожному хлопчикові дамо одну таку частину, або **половину** цілого аркуша.

Так само, коли треба розділити аршин стрічки порівну між трьома дівчатками, ми розріжемо цю стрічку на три однакові частини, і кожна дівчинка дістане одну таку частину, або **третину** цілого аршина.

Або, напр., коли треба поділити фунт чаю порівну на чотирьох покупців то ми повинні розсипати цей чай на чотирі однакові частини, і кожен покупець одержить тоді одну з цих частин, цебто **чверть** фунта чаю, і т. ин.

Половина, третина, чверть, п'ята, шоста доля, десята й т. ин.— це особливі числа, які звуться **долями** одиниці; ми можемо їх лічити й прилічувати одну до одної цілком так само, як і звичайні, цілі одиниці. Напр., як що ми розділили фунт чаю на чотирі однакові частини й потім узяли три такі частини, то ми маємо **три чверті** фунта чаю; коли б ми лінію в один сажень завдовжки поділили б на десять рівних частин і потім одміряли сім таких частин, то мали б лінію в **сім десятих** сажня, і т. ин.

Числа: три чверті, сім десятих, п'ятнадцять сотих і т. ин., а також і долі одиниці, з яких вони складені—чверть, десята доля й т. д.—звуться **дробовими числами**, або коротше **дробами**.

Як ми знаємо, не всяку величину можна виражати дробовими числами. Так, напр., довжину можна виражати як цілими вершками, так і долями вершка- половинами, чвертями й т. ин.; вагу можна вимірювати як цілими фунтами, так і їх долями—половинами, чвертями, восьмими й т. ин.; але кількість людей або кількість вистрілів із рушниці можна виражати тільки цілими числами.

§ 2. Означіння дробу. Чисельник і знаменник.

Як відомо, дробові числа записуються так:

одна половина . . . . $\frac{1}{2}$

одна третина . . . . $\frac{1}{3}$

дві третини. . . . . $\frac{2}{3}$

одна чверть . . . . $\frac{1}{4}$

три чверті . . . . $\frac{3}{4}$

п'ять шостих . . . . $\frac{5}{6}$

сім десятих . . . . $\frac{7}{10}$

і т. д.

Ми бачимо, що кожен дріб означається за допомогою двох цілих чисел, які відділено рисою; напр. дріб

сім восьмих

треба записати так:

$$\frac{7}{8}$$

Тут перше число (7) означає, скільки є доль у даному дробові; воно зветься **чисельником** дробу. А друге число (8) показує, скільки є таких доль у цілій одиниці; воно зветься **знаменником** дробу.

Можна було б, звичайно, записувати дріб і инакше, таким чином, як записуються цілі йменовані числа; напр., замісць $\frac{7}{8}$ писати: „7 восьмих". Але згаданий спосіб запису, як побачимо далі, зручніший для переведення дій з дробами.

---

§ 3. Порівняння дробів з однаковими знаменниками.

Нехай ми маємо в одному пакункові $\frac{3}{8}$ фунта тютюну, а в другому $\frac{5}{8}$ фунта; ясно, що в другому пакункові більше тютюну, бо одна й та сама міра—восьма частина фунта—міститься в першому пакункові 3 рази, а в другому 5 разів.

Так само, як що один мотузок має довжину в $\frac{7}{10}$ метра, а другий — $\frac{3}{10}$ метра, то перший мотузок довший за другого, бо одна й та сама міра—десята частина метру (десіметр)—міститься в першому мотузкові 7 разів, а в другому тільки 3 рази.

Через це ми рахуємо, що дріб $\frac{5}{8}$ більший, ніж $\frac{3}{8}$; дріб $\frac{7}{10}$ більший, ніж $\frac{3}{10}$, і т. ин.; взагалі з двох дробів з однаковими знаменниками той буде більший, в якого чисельник більший.

§ 4. Правильний та неправильний дріб. Перетворення неправильного дробу на ціле або мішане число й навпаки.

Нехай у нас є відро молока й ми розлили його нарівно в 4 сулії, тоді в кожній сулії буде чверть відра молока. Припустімо, що нам треба знову все це молоко злити в одно місце до купи, тоді ми матимем там 4 чверті, або ціле (одно)відро молока. Ми бачимо таким чином, що 4 чверті — все їдно, що ціла одиниця, або

$$\frac{4}{4}=1$$

Таким же чином, нехай ми мали фунт цукру й розсипали його нарівно в 8 пакунків; тоді в кожному пакункові буде одна восьма фунта цукру. Як що ми знову зсипемо весь цей цукор до цукорниці, то в ній буде всього 8 восьмих, або один фунт цукру. Отже дріб 8 восьмих означає те ж саме, що 1, тоб-то

$$\frac{8}{8}=1$$

Таким чином ми бачимо, що $\frac{4}{4}=1$, $\frac{8}{8}=1$, $\frac{10}{10}=1$,... взагалі д р і б, у я к о г о ч и с е л ь н и к і з н а м е н н и к о д н а к о в і, р і в н я є т ь с я о д и н и ц і.

Візьмімо тепер дріб $\frac{3}{4}$. Ясно, що він менший за одиницю, бо одиниця—все їдно, що 4 чверті. Так само й дріб $\frac{5}{8}$ менший за одиницю, бо в одиниці 8 восьмих; дріб $\frac{7}{10}$ менший за одиницю, бо в одиниці 10 десятих, і т. ин. Взагалі, д р і б, у я к о г о ч и с е л ь н и к м е н ш и й о д з н а м е н н и к а, б у д е м е н ш и й з а о д и н и ц ю; такий дріб зветься п р а в и л ь н и м.

Навпаки, дріб $\frac{7}{5}$ більший за одиницю, бо в одиниці тільки 5 п'ятих; так само дріб $\frac{30}{6}$ більший за одиницю, бо в одиниці тільки 6 шостих. І взагалі д р і б, в я к о г о ч и с е л ь н и к б і л ь ш и й о д з н а м е н н и к а, б у д е б і л ь ш и м з а о д и н и ц ю; такий дріб, а так само й дріб, що рівен одиниці, зветься н е п р а в и л ь н и м.

Розгляньмо неправильний дріб $\frac{10}{5}$. Він означає, що якусь цілу одиницю поділено на 5 рівних частин (п'ятих доль), і таких частин узято 10.

Але кожні 5 п'ятих доль, як було згадано, все їдно, що 1 одиниця; значить 10 п'ятих—все їдно, що 2 одиниці, тоб-то

$$\frac{10}{5}=2$$

Візьмімо ще дріб $\frac{30}{6}$. Він означає, що одиницю було поділено на 6 рівних частин, і таку частину (шосту долю) взято 30 разів. Але при цьому кожні 6 шостих доль складають одну одиницю, значить 30 шостих складають стільки цілих одиниць, скільки разів у 30 міститься 6, тоб-то 5. Отже

$$\frac{30}{6}=5$$

Таким же чином ми знайшли б, що $\frac{24}{8} = 3$, $\frac{30}{3} = 10$ і т. ин.; взагалі як що чисельник дробу ділиться на знаменника без остачі, то дріб рівен цілому числу, яке повстає після цього ділення.

Розгляньмо тепер дріб $\frac{13}{5}$. Він має таке значіння: якусь одиницю поділено на 5 рівних доль, і таких доль узято 13. Але кожні 5 п'ятих доль складають одну цілу одиницю; тому 13 п'ятих складають 2 цілі одиниці та ще 3 п'ятих долі. Це записується так:

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

В такий же спосіб разгляньмо ще дріб $\frac{47}{6}$. Його значіння таке: цілу одиницю поділено на 6 рівних доль, і таких доль узято 47. Але кожні 6 шостих доль складають цілу одиницю; значить 47 шостих складають стільки цілих одиниць, скільки разів у 47 міститься 6, тоб-то 7 одиниць та ще 5 шостих доль. Отже маємо

$$\frac{47}{6} = 7\frac{5}{6}$$

Так само ми знайшли б, що $\frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$, $\frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}$, взагалі: як що чисельник дробу ділиться на знаменника з остачою, то дріб рівняється цілому числу, яке повстає після цього ділення, та ще з стількома долями, скільки одиниць в остачі; таке ціле число з дробом зветься мішаним числом.

Навпаки, иноді виникає потреба перетворити ціле або мішане число на неправильний дріб; напр., знайти, скільки буде в 4 цілих одиницях усього п'ятих доль. Тоді міркуємо так: в одній одиниці 5 п'ятих, а в 4 одиницях їх буде 4 рази по 5, тоб-то 20; отже маємо

$$4 = \frac{20}{5}$$

Так само, як що нам треба перетворити $5\frac{3}{8}$ на восьми долі, то обчисляємо так: в одній одиниці 8 восьмих, а в 5 одиницях їх буде 8×5, або 40; та ще 3 восьмих, а всього разом 43 восьмих; отже

$$5\frac{3}{8} = \frac{43}{8}$$

На підставі таких прикладів робимо висновок, що перетворення цілого числа на неправильний дріб переводиться через множення цілого на знаменника дробу; а як що треба перетворити мішане число, то робимо так само й до одержаного добутка додаємо чисельник дробу.

Завважмо ще, що перетворення цілого або мішаного числа на неправильний дріб цілком схоже на роздроблення йменованого числа (перетворення значніших мір на дрібніші); а перетворення неправильного дробу на ціле або мішане число—на згуртування йменованих чисел (перетворення дрібніших мір на значніші).

Порівняймо, напр., такі два питання:

1) Число $4\frac{2}{3}$ перетворити на неправильний дріб.

Обчисляємо так: в одній одиниці 3 третини, а в 4-х одиницях їх буде в 4 рази більше, цеб-то 12, та ще 2 третини, а всього разом 14 третин; отже

4 цілих 2 третини = 14 третинам, або инакше: $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

2) Перетворити 4 саж. 2 арш. на аршини.

Обчисляємо так: в одному сажні 3 арш., а в 4-х сажнях їх буде в 4 рази більше, цеб-то 12, та ще 2 арш., а всього разом 14 аршинів; отже

4 саж. 2 арш. = 14 арш.

Бачимо, що й міркування й обчислення цілком однакові. Теж саме знайдемо, порівнюючи ще такі завдання:

1) Дріб $\frac{97}{40}$ перетворити на ціле або мішане число.

Міркуємо так: в одній одиниці 40 сорокових, значить у 97 сорокових буде стільки одиниць, скільки разів у 97 міститься 40, — тоб-то 2 одиниці та ще 17 сорокових. Отже

97 сорокових, = 2 цілим 17 сороковим або $\frac{97}{40} = 2\frac{17}{40}$

2) 97 фунтів перетворити на пуди.

Міркуємо так: в одному пуді 40 фунтів, значить у 97 фунтах буде стільки пудів, скільки разів у 97 міститься 40, — тоб-то 2 пуди та ще 17 фунтів. Отже

97 фунтів = 2 пуд. 17 фун.

---

§ 5. Додавання дробів з однаковими знаменниками.

В одній коробці $\frac{5}{8}$ фунта чаю, а в другій $\frac{3}{8}$ фун. Скільки чаю в обох разом?

В обох коробках разом ось скільки: 5 восьмих та ще 3 восьмих, а всього 8 восьмих, або цілий фунт. Це ми записуємо так:

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Нехай ще треба додати $\frac{3}{7}$ і $\frac{2}{7}$ Це буде ось скільки: 3 сьомих та ще 2 сьомих, а всього 5 сьомих; значить

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Розглядаючи ці приклади, ми бачимо, що додавання дробів з однаковими знаменниками має таке саме значіння, як і додавання цілих іменованих чисел з однаковою назвою, а переводиться воно так: треба додати лише чисельників, а знаменник залишається той, що й був.

Так, напр., матимемо:

$$\frac{7}{16}+\frac{3}{16}=\frac{10}{16},$$

$$\frac{7}{12}+\frac{5}{12}=\frac{12}{12}=1,$$

$$\frac{6}{7}+\frac{4}{7}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}, \text{ і т. д.}$$

В такий же спосіб міркуємо й тоді, коли один або обидва доданки будуть мішаними числами. Нехай, напр., ми повинні до $2\frac{7}{8}$ додати $\frac{3}{8}$. Ясно, що ми маємо тут 2 цілі одиниці, а крім того 7 восьмих та ще 3 восьмих, цеб-то 10 восьмих, або одну цілу одиницю й 2 восьмих; всього ж разом маємо 3 одиниці й 2 восьмих:

$$2\frac{7}{8}+\frac{3}{8}=2\frac{10}{8}=3\frac{2}{8}$$

Нехай ще треба додати $5\frac{9}{16}$ і $3\frac{11}{16}$. Бачимо, що цілих одиниць у нас буде 5 та 3, тоб-то 8; а шіснадцятих доль 9 та 11, тоб-то 20; ці 20 шіснадцятих складають ще 1 одиницю й 4 шіснадцятих; а всього разом матимем 8 одиниць і 4 шіснадцятих. Отже

$$5\frac{9}{16}+3\frac{11}{16}=8\frac{20}{16}=9\frac{4}{16}$$

Додавання мішаних чисел дуже схоже на додавання складних іменованих чисел; порівняймо, напр., з останнім обчисленням додавання 5 арш. 9 верш. і 3 арш. 11 верш. Ми міркуємо цілком так само: аршинів у нас буде 5 та 3, цеб-то 8, а вершків 9 та 11, тоб-то 20; ці 20 вершків складатимуть ще 1 аршин і 4 вершки, тому всього разом маємо 9 арш. 4 верш.

Таким же чином ми знайшли-б:

$$5+\frac{3}{4}=5\frac{3}{4},$$

$$5\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=5\frac{4}{4}=6,$$

$$7\frac{5}{6}+2\frac{1}{6}=9\frac{6}{6}=10,$$

$$2\frac{5}{12}+5+3\frac{1}{12}+\frac{7}{12}=10\frac{13}{12}=11\frac{1}{12}, \text{ і т. ин.}$$

— тоб-то **при додаванні мішаних чисел ми додаємо спершу цілі одиниці й дроби зокрема, а потім одержані числа одно до одного.**

---

§ 6. Віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розгляньмо таку задачу:

В коробці було $\frac{5}{8}$ фунта чаю; з цього запасу витрачено $\frac{3}{8}$ ф. Скільки чаю лишилося в коробці?

Всього чаю лишилось ось скільки: 5 восьмих без 3 восьмих, цеб-то 2 восьмих. Ми запишемо це так:

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}$$

Нехай ще треба від $\frac{6}{7}$ відняти $\frac{2}{7}$. Це все їдно, що 6 сьомих без 2 сьомих, тоб-то 4 сьомих:

$$\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

Ми бачимо тепер, що віднімання дробів з однаковими знаменниками має таке ж саме значіння, як і віднімання цілих іменованих чисел однакової назви, і переводиться воно так: від чисельника першого дробу треба видняти чисельник другого, а знаменник залишається той, що й був.

В такий же спосіб міркуємо й тоді, коли одно з чисел, що дано для віднімання, буде цілим або мішаним. Нехай, напр., ми повинні від $2\frac{5}{6}$ відняти $\frac{4}{6}$. Число $2\frac{5}{6}$ означає 2 цілі одиниці та ще 5 шостих; як що ми звідси віднімемо 4 шостих, то залишиться 2 цілі й 1 шоста, тоб-то:

$$2\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=2\frac{1}{6}$$

Нехай тепер од 8 треба відняти $2\frac{3}{4}$. Міркуємо так: од 8 одиниць однімаємо спочатку 2, — лишається 6 одиниць; звідсіля ми повинні відняти ще 3 чверті. Беремо для цього одну цілу одиницю й перетворюємо її на чверті; матимемо 4 чверті, а всього разом 5 одиниць і 4 чверті. Звідси віднімаємо 3 чверті й одержуємо в остачі 5 одиниць і 1 чверть. Таким чином ми знайшли, що

$$8-2\frac{3}{4}=6-\frac{3}{4}=5\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=5\frac{1}{4}$$

Нехай ще треба від $10\frac{2}{7}$ відняти $3\frac{5}{7}$. Віднімаємо від $10\frac{2}{7}$ спочатку 3, маємо $7\frac{2}{7}$; звідси ми повинні відняти ще $\frac{5}{7}$. Але від $\frac{2}{7}$ не можна відняти $\frac{5}{7}$; тому беремо одну цілу одиницю й перетворюємо її на сьомі долі,—матимемо $\frac{7}{7}$, та ще $\frac{2}{7}$, а всього $\frac{9}{7}$; а разом з цілими одиницями $6\frac{9}{7}$. Звідси віднімаємо тепер $\frac{5}{7}$ і знаходимо остаточно $6\frac{4}{7}$:

$$10\frac{2}{7}-3\frac{5}{7}=7\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=6\frac{9}{7}-\frac{5}{7}=6\frac{4}{7}$$

Отже при відніманні мішаних чисел ми віднімаємо спочатку ціле число, а потім дріб (або навпаки),—зовсім так само, як робимо при відніманні складних іменованих чисел; напр., коли нам треба від 10 саж. 2 футів одняти 3 саж. 5 фут., то ми віднімаємо спершу 3 сажні й одержуємо 7 саж. 2 фути; звідси треба відняти ще 5 футів, тому беремо 1 сажінь, перетворюємо його на фути, до одержаних 7 футів додаємо ще 2 фути й маємо нарешті 6 саж. 9 фут.; звідси можемо вже відразу відняти 5 футів і маємо остаточно 6 саж. 4 фути.

§ 7. Множення дробу на ціле число.

Візьмімо задачу:

Робітник одержує що-дня $\frac{3}{4}$ фунта хліба; скільки хліба він дістане за тиждень?

Очевидно, робітник одержить у неділю $\frac{3}{4}$ ф., та ще в понеділок $\frac{3}{4}$ ф., у вівторок $\frac{3}{4}$ ф. і т. д., а всього за 7 днів тижня ось скільки:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}, \text{ або } 5\frac{1}{4} \text{ ф.}$$

Ми бачимо, що тут нам довелося число $\frac{3}{4}$ взяти 7 разів, а це можна записати коротше—за допомогою знака множення:

$$\frac{3}{4}\times 7=\frac{21}{4}$$

Таким же чином помножити $\frac{3}{8}$ на 5—все їдно, що $\frac{3}{8}$ узяти 5 разів, і ми матимем $\frac{15}{8}$, або $1\frac{7}{8}$:

$$\frac{3}{8}\times 5=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

На підставі таких прикладів ми пересвідчуємося, що множення дробу на ціле має таке саме значіння, як і множення цілого числа на ціле, а переводиться воно так: **треба помножити чисельник дробу на дане ціле число**, а знаменник лишається без зміни.

Напр.
$$\frac{5}{6}\times 12=\frac{60}{6}=10,$$

$$\frac{9}{10}\times 7=\frac{63}{10}=6\frac{3}{10}, \text{ і т. ин.}$$

Треба звернути особливу увагу на випадок, коли **множитель рівен знаменникові дробу**.

Нехай, напр., нам треба помножити $\frac{1}{8}$ на 8; очевидно, що

$$\frac{1}{8}\times 8=\frac{8}{8}=1$$

Помножмо тепер $\frac{3}{8}$ на 8. Це можна перевести найпростіше так: візьмім одну восьму й повторім її 8 разів, матимем 1 цілу одиницю; далі візьмім другу восьму та повторім її 8 разів,—матимем ще 1 одиницю; і нарешті візьмім третю восьму й повторім її 8 разів, знайдемо ще 1 одиницю. Всього ми матимем таким чином 3 цілі одиниці:

$$\frac{3}{8}\times 8=3$$

Нехай треба ще помножити $\frac{5}{6}$ на 6. Візьмімо спочатку одну шосту й повторім її 6 разів—буде 1 одиниця; потім візьмім другу шосту й повторім її 6 разів—буде ще 1 одиниця; далі візьмім третю шосту 6 разів—буде ще 1 одиниця, і т. д.; всього дістанемо стільки одиниць, скільки в нас було шостих доль, тоб-то 5. Отже

$$\frac{5}{6}\times 6=5$$

Таким чином знайшли б, що

$$\frac{9}{10}\times 10 = 9,$$

$$\frac{7}{12}\times 12 = 7, \text{ і т. ин.}$$

—взагалі, коли множимо дріб на його знаменника, то одержуємо стільки цілих одиниць, скільки їх є в чисельнику дроба.

Розуміється, ми могли б дійти до такого ж висновку, коли б робили в цих випадках множення й по загальному правилу; напр.:

$$\frac{3}{8}\times 8 = \frac{24}{8} = 3,$$

$$\frac{5}{6}\times 6 = \frac{30}{6} = 5,$$

але ж згаданий прийом обчислення був простішим.

В такий же спосіб міркуємо й при множенні мішаного числа на ціле. Візьмім таку задачу:

Червоноармієць одержує що-дня $1\frac{1}{2}$ ф. хліба; скільки хліба дістане він за тиждень?

Ясно, що для відповіді на це запитання ми повинні $1\frac{1}{2}$ ф. взяти 7 разів, або помножити $1\frac{1}{2}$ ф. на 7. Обчисляємо це так: 1 фунт узяти 7 разів — буде 7 фунтів, та ще $\frac{1}{2}$ ф. взяти 7 разів—буде $\frac{7}{2}$, або $3\frac{1}{2}$ фунти; а всього разом червоноармієць одержить 7 ф. + $3\frac{1}{2}$ ф., або $10\frac{1}{2}$ фунтів. Отже ми знайшли, що

$$1\frac{1}{2}\times 7 = 7\frac{7}{2} = 7 + 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$$

Нехай тепер треба помножити $6\frac{2}{3}$ на 5. Для цього спочатку 6 беремо 5 разів,—маємо 30; потім ще $\frac{2}{3}$ беремо 5 разів,—маємо $\frac{10}{3}$, або $3\frac{1}{3}$; а всього маємо $33\frac{1}{3}$:

$$6\frac{2}{3}\times 5 = 30\frac{10}{3} = 30 + 3\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$$

Бачимо, що при множенні мішаного числа на ціле ми множимо ціле число й дріб зокрема на дане ціле й додаємо добутки, які одержуємо.

Це множіння дуже схоже на множіння складного іменованого числа; напр., коли нам треба помножити 6 саж. 2 арш. на 5, то ми обчисляємо цілком так само, як і в останньому прикладі: беремо 6 саж. 5 разів, потім 2 арш. 5 разів і додаємо одержані числа одно до одного:

6 саж. 2 арш. × 5 = 30 саж. 10 арш. = 30 саж. + 3 саж. 1 арш. =
= 33 саж. 1 арш.

§ 8. Ділення дробу на ціле число. Ділення цілого або мішаного числа на ціле.

Візьмім задачу:

Мотузок в $\frac{9}{10}$ метра завдовжки треба розрізати на три рівні частини. Якої довжини буде кожна частина?

Ясно, що кожна частина матиме довжину в $\frac{3}{10}$ метра, бо взявши 3 десятих 3 рази, ми одержуємо 9 десятих.

Тому ми можемо записати, що

$$\frac{9}{10} : 3 = \frac{3}{10}$$

Таким же чином, як що нам треба поділити $\frac{15}{16}$ на 5, то ми матимем $\frac{3}{16}$, бо, взявши 3 шіснадцятих 5 разів, ми знайшли-б $\frac{15}{16}$. Отже

$$\frac{15}{16} : 5 = \frac{3}{16}$$

На підставі цих прикладів ми бачимо, що ділення дробу на ціле число має таке саме значіння, як і ділення цілого числа на кілька рівних частин, а переводиться воно так: **треба поділити чисельник на ціле число**, а знаменник залишається без зміни.

Напр.

$$\frac{8}{15} : 4 = \frac{2}{15},$$

$$\frac{7}{20} : 7 = \frac{1}{20}, \text{ і т. ин.}$$

Разуміється, цей спосіб ділення придатний тільки для тих випадків, **коли чисельник ділиться на дане ціле число**; як обчисляти в инших випадках—про це буде розмова далі (див. § 12).

Нехай тепер ми повинні поділити 1 на 4. Це значить знайти таке число, яке треба взяти 4 рази, щоб одержати 1 одиницю; ясно, що таке число є $\frac{1}{4}$, бо $\frac{1}{4} \times 4 = 1$.

Таким чином ми знайшли, що

$$1 : 4 = \frac{1}{4}$$

Поділімо тепер 3 на 7. Це значить знайти таке число, яке треба помножити на 7, щоб одержати 3; очевидно, таким числом буде дріб $\frac{3}{7}$, бо $\frac{3}{7} \times 7 = 3$. Отже маємо

$$3 : 7 = \frac{3}{7}$$

В такий же спосіб ми могли-б знайти, що

$$5 : 12 = \frac{5}{12},$$

$$10 : 7 = \frac{10}{7}, \text{ і т. ин.}$$

— взагалі, **від ділення цілого числа на ціле ми одержуємо дріб, якого чисельник рівняється діленикові, а знаменник—дільтелеві**.

Навпаки, всякий дріб ми можемо вважати за частку від ділення її чисельника на знаменника напр., дріб $\frac{1}{7}$ можна вважати за частку від ділення 1 на 7, бо $\frac{1}{7}$ після множення па 7 дає 1; дріб $\frac{3}{5}$ можна вважати за частку від ділення 2 на 5, бо $\frac{3}{5} \times 5 = 3$, і т. ин.

Розгляньмо ще випадок ділення мішаного числа на ціле. Нехай, напр., ми повинні поділити $3\frac{3}{4}$ на 5. Ясно, що тут на кожну частину не припаде ні по одній цілій одиниці; тому перетворюємо $3\frac{3}{4}$ на чверті, і дріб $\frac{15}{4}$, який одержуємо, ділимо на 5, як це робили раніше. Таким чином маємо

$$3\frac{3}{4} : 5 = \frac{15}{4} : 5 = \frac{3}{4}$$

Поділімо ще $16\frac{5}{8}$ на 7. Ділимо спочатку 16 на 7; бачимо, що на кожну частину припаде по 2 цілі одиниці й ще залишаються неподіленими 2 цілі й 5 восьмих. Перетворюємо $2\frac{5}{8}$ на восьмі долі, маємо $\frac{21}{8}$; це число ділимо на 7 і бачимо, що на кожну частину припаде ще 3 восьмих. Отже маємо остаточно

$$16\frac{5}{8} : 7 = 2\frac{3}{8}$$

Ми бачимо, що ділення мішаного числа на ціле нагадує нам ділення складного йменованого числа на кілька рівних частин; напр., коли ми ділимо 18 саж. 1 арш. на 5, то ми ділимо спочатку 18 саж. на 5; одержуємо на кожну частину по 3 саж. і в остачі 3 саж. 1 арш. Цю остачу ми перетворюємо на аршини й маємо 10 арш.; ділимо їх на 5 рівних частин і дістаємо 2 арш.; остаточно маємо

18 саж. 1 арш. : 5 = 3 саж. 2 арш.

§ 9. Ділення дробів з однаковими знаменниками.

Візьмімо задачу:

Стрічку в $\frac{9}{10}$ метра завдовжки треба розрізати на частини по $\frac{3}{10}$ метра в кожній. Скільки буде таких частин?

Очевидно, ми знайдемо це шляхом ділення: таких частин буде стільки, скільки разів треба взяти 3 десятих, шоб одержати 9 десятих,—тоб-то 3 частини. Записуємо це так:

$$\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = 3$$

Поділімо ще $\frac{15}{16}$ на $\frac{3}{16}$ Це значить знайти, скільки разів треба взяти 3 шіснадцятих, щоб дістати 15 шіснадцятих; ділимо для цього 15 на 3 й маємо 5. Отже

$$\frac{15}{16} : \frac{3}{16} = 5$$

Ми бачимо тепер, що при діленні дробів з однаковими знаменниками **досить поділити самих чисельників** (а знаменники зникають); і взагалі це ділення дуже схоже на ділення цілих іменованих чисел одної назви; напр., поділити $\frac{21}{40}$ на $\frac{3}{40}$ значить знайти, скільки разів 3 сорокових містяться в 21 сороковій, так само, як поділити 21 фунт на 3 фунти значить знайти, скільки разів 3 фунти містяться в 21 фунті; і ми маємо в одному й в другому випадку частку 7.

В такий же спосіб ми переводимо й ділення цілого або мішаного числа на дріб або на мішане число.

Нехай, напр., треба поділити $17\frac{1}{2}$ на $2\frac{1}{2}$. Перетворимо діленик і ділитель на половини; матимем $\frac{35}{2}$ і $\frac{5}{2}$. Таким чином поділити $17\frac{1}{2}$ на $2\frac{1}{2}$ — все їдно, що знайти, скільки разів у 35 половинах міститься 5 половин, а для цього ділимо 35 на 5 і одержуємо 7. Отже

$$17\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{35}{2} : \frac{5}{2} = 35 : 5 = 7$$

Поділімо ще 15 на $1\frac{1}{4}$. Перетворімо діленик й ділитель на однакові долі, тоб-то на чверті,—матимем $\frac{60}{4}$ і $\frac{5}{4}$. Ми бачимо тепер, що поділити 15 на $1\frac{1}{4}$ — все їдно, що знайти, скільки разів у 60 чвертях містяться 5 чвертей, а для цього ми повинні розділити 60 на 5; маємо 12. Отже

$$15 : 1\frac{1}{4} = \frac{60}{4} : \frac{5}{4} = 60 : 5 = 12$$

В такий же спосіб ми знайшли б, що

$$18 : \frac{3}{4} = \frac{72}{4} : \frac{3}{4} = 72 : 3 = 24,$$

$$8\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{33}{4} : \frac{3}{4} = 33 : 3 = 11, \text{ і т. ин.}$$

---

§ 10. Розвязування задач, в яких треба від даного числа знайти якусь його частину або навпаки.

Візьмімо таку задачу:

Потяг проходить 36 верстов у годину; скільки верстов пройде він за $\frac{3}{4}$ години?

Знайдімо спочатку, скільки верстов пройде потяг за $\frac{1}{4}$ години; коли в 1 годину він проходить 36 верстов, то в $\frac{1}{4}$ години він пройде в 4 рази менше, тоб-то 9 верстов; а в $\frac{3}{4}$ години — в 3 рази більше від останнього числа, тоб-то 27 верстов.

Розвязання цієї задачі ми можемо записати двома способами: по перше, звичайним способом,—по запитанням:

1) Скільки верстов пройде потяг за $\frac{1}{4}$ години?

$$36 : 4 = 9$$

2) Скільки верстов пройде потяг за $\frac{3}{4}$ години?

$$9 \times 3 = 27$$

— по-друге, рядками — в такий спосіб:

В 1 годину потяг проходить 36 верстов,

в $\frac{1}{4}$ години . . . . 36 вер. : 4 = 9 вер.,

в $\frac{3}{4}$ години . . . . 9 вер. $\times$ 3 = 27 вер.

Таким же чином ми розвязуемо задачу:

Фунт тютюну коштує 240 карб. Скільки треба заплатити за $\frac{5}{8}$ ф. цього тютюну?

1 фунт тютюну коштує 240 карб.,

$\frac{1}{8}$ фун. . . . . 240 карб. : 8 = 30 карб.,

$\frac{5}{8}$ фун. . . . . 30 карб. $\times$ 5 = 150 карб.,

Бачимо, що розвязання цих задач нагадує нам спосіб зведення до одиниці, яким ми розвязували подібні задачі з цілими числами. Нехай, напр., нам дана задача: 8 фунтів тютюну коштують 240 карб.; скільки коштують 5 фунтів цього тютюну? Ми розвязували б цю задачу за допомогою цілком таких самих міркувань:

8 фунтів тютюну коштують 240 карб.

1 фунт . . . . 240 карб. : 8 = 30 карб.

5 фунтів . . . . 30 карб. $\times$ 5 = 150 карб.

Ріжниця тільки в тім, що в задачі з дробовими числами „одиниця" в нас не ціла, а дробова ($\frac{1}{8}$).

Цей самий спосіб придатний і для розвязування обернених питань—коли нам відома якась частина числа, а треба знайти все це число. Візьмімо, напр., таку задачу:

За $\frac{3}{4}$ години велосіпедист проїхав 15 верстов. Яке віддалення він міг би проїхати в годину?

Знайдімо спочатку, яке віддалення проїде велосіпедист за $\frac{1}{4}$ години; як що за $\frac{3}{4}$ години він проїзжає 15 верстов, то за $\frac{1}{4}$ години проїде в 3 рази менше, тоб-то 5 верстов; а в цілу годину — в 4 рази більше від останнього числа, тоб-то 20 верстов.

Все розвязання можна записати так:

1) Скільки верстов проїде велосіпедист за $\frac{1}{4}$ години?

$$15 : 3 = 5$$

2) Скільки верстов проїде він за цілу годину?

$$5 \times 4 = 20$$

— або рядками:

За $\frac{3}{4}$ години велосіпедист проїзжає 15 верстов,

За $\frac{1}{4}$ години . . . . 15 вер. : 3 = 5 вер.,

За 1 годину . . . . 5 вер. $\times$ 4 = 20 вер., Розвяжімо ще таку задачу:

За $\frac{3}{8}$ фунта чаю заплачено 120 карб. Скільки коштує 1 фунт цього чаю?

Ми переводимо розвязання цієї задачі рядками, так:

$\frac{3}{8}$ фунта чаю коштують 120 карб.,
$\frac{1}{8}$ фунта . . . . 120 карб. : 3 = 40 карб.
1 фунт . . . . 40 карб. $\times$ 8 = 320 карб.

Для порівняння візьмім і тут відповідну задачу з цілими числами.

3 фунти чаю коштують 120 карб.; скільки треба заплатити за 8 фунтів цього чаю?

Ми розвязали б її шляхом таких самих міркувань, за допомогою зведення до одиниці:

3 фунти чаю коштують . . 120 карб.,
1 фунт . . . . 120 карб. : 3 = 40 карб.,
8 фунтів . . . . 40 карб. $\times$ 8 = 320 карб.

Ріжниця лише в тому, що в попередньому випадку „одиниця" в нас була не ціла, а дробова ($\frac{1}{8}$) фунта.

---

§ 11. Порівняння дробів з ріжними знаменниками.

Нехай, напр., у нас є два мотузи, з яких один має завдовжки 5 сажнів, а другий 14 аршинів; як що нам треба знайти, який з них більший за другого, то ми повинні виразити їхню довжину в однакових мірах, напр., в аршинах; з огляду на те, що в одному сажні 3 аршини, то в 5 сажнях 15 аршинів, і ясно, що перший мотузок довший, бо другий містить тільки 14 аршинів.

Нехай тепер у нас є дві пачки чаю, і в одній з них $\frac{3}{4}$ фунта, а в другій $\frac{5}{8}$ фунта. Щоб знайти, в якій з них більше чаю, ми повинні виразити їхню вагу в однакових долях фунта, напр. у восьмих. Міркуємо при цьому так: в цілому фунті або в 4 чвертях буде 8 восьмих, тому в одній чверті 2 восьмих, а в 3 чвертях — 6 восьмих; таким чином у першій пачці $\frac{6}{8}$ фунта чаю, а в другій тільки $\frac{5}{8}$, і ясно, що в першій пачці більше чаю, ніж у другій.

Тут ми знайшли, що

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8},$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Ми можемо виявити це наочно за допомогою рисунка, таким чином:

На рис. 1 ми бачимо з лівого боку прямокутник, який поділено сторчовими лініями на 4 менших прямокутники (чверті) й одночасно на 8 квадратів (восьмі). З рисунка ясно, що кожен менший прямокутник складається з двох квадратів, цеб-то одна чверть містить 2 восьмих, а 3 чверті—6 восьмих. Те ж саме видно на кругу, якого нарисовано з правого боку: цей круг поділено двома діаметрами (поземним та сторчовим) на 4 чверті, а перемежними діаметрами—на 8 восьмих, і ми бачимо, що $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$, а $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

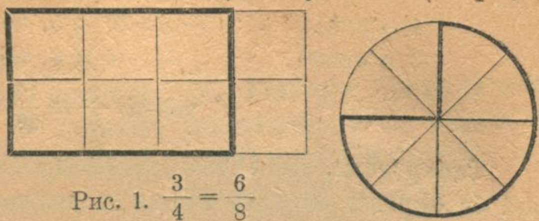


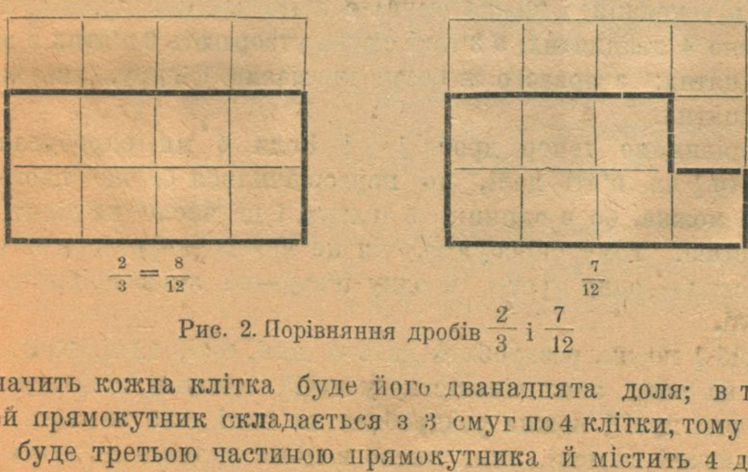
Рис. 1. $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

Нехай тепер нам треба порівняти дроби $\frac{2}{3}$ і $\frac{7}{12}$. Для цього спробуймо перетворити $\frac{2}{3}$ на дванадцяті долі. Міркуємо так: одна одиниця містить 3 треті й одночасно 12 дванадцятих, тому

3 треті складають 12 дванадцятих,
1 третя . . . . . . 12 : 3, або 4 дванадцятих,
2 треті . . . . . . 4 $\times$ 2, або 8 дванадцятих.

Отже $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, і очевидно, що з двох даних дробів ($\frac{2}{3}$ і $\frac{7}{12}$) перший буде більшим.

Те ж саме ми можемо знайти за допомогою відповідного рисунку, коли візьмемо прямокутник, який означав би цілу одиницю й був би поділений на 12-ті долі (найзручніше зробити це на папері, що його поділено на кліточки; ми можемо взяти для цього прямокутник з 12 кліточок, якого довжина 4 одиниці, а ширина 3—див. рис. 2). Ми бачимо, що весь прямокутник складається з 12 клі-



$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ $\frac{7}{12}$

Рис. 2. Порівняння дробів $\frac{2}{3}$ і $\frac{7}{12}$

ток, значить кожна клітка буде його дванадцята доля; в той же час цей прямокутник складається з 3 смуг по 4 клітки, тому кожна смуга буде третьою частиною прямокутника й містить 4 дванадцятих, а 2 треті складають 8 дванадцятих.

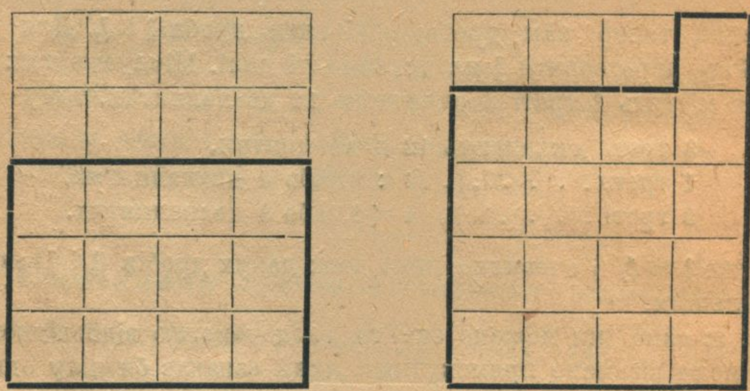
Порівняймо ще дроби $\frac{3}{5}$ і $\frac{17}{20}$. Перетворюємо для цього $\frac{3}{5}$ на двадцяті долі; з огляду на те, що одна одиниця містить 5 п'ятих і одночасно 20 двадцятих, то маємо:

5 п'ятих складають 20 двадцятих,
1 п'ята . . . . 20 : 5, або 4 двадцятих,
3 п'ятих . . . . . . 4×3, або 12 двадцятих,—

$$\text{тоб-то } \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

Тепер ясно, що з двох даних дробів $\frac{3}{5}$ і $\frac{17}{20}$ більшим буде другий, бо перший містить тільки 12 двадцятих.

На рисунку це можна виявити так. Беремо прямокутник з 20 кліток, який означає цілу одиницю (рис. 3 ліворуч—для цього рисуємо на клітковому папері прямокутник, якого довжина була-б 4 одиниці, а ширина 5); ясно, що він складається з 5 смуг по



$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ $\frac{17}{20}$

Рис. 3 Порівняння дробів $\frac{3}{5}$ і $\frac{17}{20}$.

4 клітки в кожній, і кожна смуга є п'ята частина прямокутника й одночасно 4 двадцятих; а 3 такі смуги утворюють 3 п'ятих й містять 12 двадцятих; з правого ж боку ми маємо фігуру, яка означає 17 двадцятих.

Порівняймо тепер дроби $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{5}$. Коли б ми спробували перетворити $\frac{1}{3}$ на п'яті долі, то пересвідчилися б, що цього зробити не можна, бо в одиниці 5 п'ятих, і це число не ділиться на 3 без остачі. Тому спробуймо, чи не можна перетворити обидві дані частини—одну третю й одну п'яту—на якісь дрібніші однакові долі.

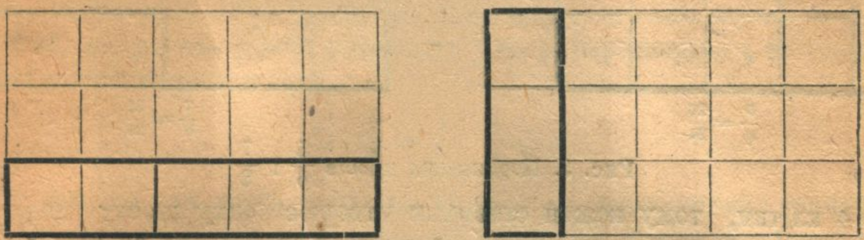
Дріб $\frac{1}{3}$ можна роздробити на 6-ті долі, 9-ті, 12-ті, 15-ті, . . . взагалі на такі, яких кількість у цілій одиниці ділиться на 3. Так само й дріб $\frac{1}{5}$ можна роздробити на 10-ті долі, на 15-ті, 20-ті, 30, . . . взагалі на такі, яких число в цілій одиниці ділиться на 5. Звідси відно, що обидва дані дроби можна перетворити на 15-ті долі; з огляду на те, що в цілій одиниці 15 п'ятнадцятих, то в одній третині буде **5** п'ятнадцятих, а в одній п'ятій 3 п'ятнадцятих:

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{15},$$

$$\frac{1}{5}=\frac{3}{15},$$

і тому ясно, що $\frac{1}{3}$ більша за $\frac{1}{5}$.

На рисунку це можна виявити так. Візьмімо прямокутник із 15 кліточок, який має 5 одиниць завдовжки й 3 завширшки (рис. 4); ясно, що він складається з 3 смуг по 5 кліточок і одно-



$\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$

Рис. 4. Порівняння дробів $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{5}$

часно з 5 стовпчиків по 3 кліточки. Кожна смуга утворює таким чином одну третину цілого й складається з 5 кліточок, тоб-то 5 п'ятнадцятих; а кожен стовпчик означає одну п'яту й містить три клітки, тоб-то 3 п'ятнадцятих.

Порівняймо ще дроби $\frac{5}{6}$ і $\frac{7}{8}$. Шості долі можна роздробити на 12-ті, 18-ті, 24-ті, ... взагалі на такі долі, кількість яких у цілій одиниці ділиться на 6. Восьмі ж долі можна роздробити на 16-ті, 24-ті, 32-і, . . . взагалі на такі, яких число в цілій одиниці ділиться на 8. Очевидно, наші дроби треба роздробити в такі долі, яких кількість в одиниці ділилася б і на 6, і на 8; з попереднього видно, що такими долями будуть 24-ті. Тепер міркуємо, як і раніше: через те, що одна одиниця містить 6 шостих і одночасно 24 двадцять-четвертих, то

6 шостих складають 24 двадцять-четвертих,
1 шоста . . . . . . 24 : 6, або 4 двадцять-четвертих,
5 шостих . . . . . . 4 × 5, або 20 двадцять-четвертих.

Таким же чином

8 восьмих складають 24 двадцять-четвертих,
1 восьма . . . . . . 24 : 8, або 3 двадцять-четвертих,
7 восьмих . . . . . 3 × 7, або 21 двадцять-четверту.

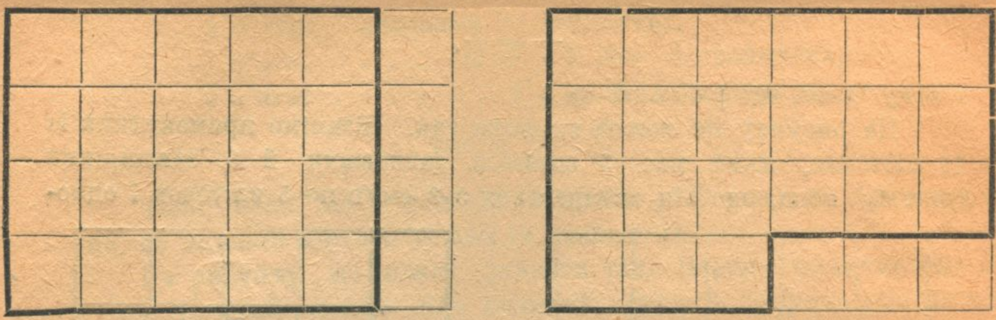
Отже ми маємо

$$\frac{5}{6}=\frac{20}{24},$$

$$\frac{7}{8}=\frac{21}{24},$$

і бачимо, що другий дріб більший од першого.

Ми можемо виявити це на рисунку так. Візьмімо прямокутник із 24 кліточок, який мав би завдовжки 6 одиниць, а завширшки 4 (рис. 5). Ми бачимо, що він складається з 6 стовпчиків



$\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$ $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$

Рис. 5. Порівняння дробів $\frac{5}{6}$ і $\frac{7}{8}$

по 4 клітки, тому кожен стовпчик утворює одну шосту долю й містить 4 двадцять-четвертих, а 5 шостих складають 20 двадцять-четвертих. Разом з тим цей прямокутник складається з 4 смуг по 6 кліток, значить кожна смуга утворює четверту долю його, а її половина—восьму долю, і містить 3 клітки; 7 же таких частин (восьмих) складають 21 двадцять-четверту.

На підставі цих прикладів ми бачимо, що **для порівняння двох дробів з ріжними знаменниками ми повинні перетворити їх на однакові долі**, або, як кажуть, **звести їх до спільного знаменника**, а для цього доводиться або безпосереднє перетворювати одні долі на другі, або знайти такі долі, на які можно було б роздробити обидва дроби; для цього треба підшукати **такі долі, яких число в цілій одиниці ділилося б на обох знаменників без остачі**.

§ 12. Дії з дробами, що їх можна виконувати через зведення дробів до спільного знаменника.

Як що ми вміємо зводити дроби до спільного знаменника, то можемо додавати й віднімати які завгодно дроби; для цього досить спочатку перетворити їх на однакові долі, тоб-то звести до спільного знаменника, а потім додати або відняти по відомих нам правилах.

Нехай, напр., треба додати $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$; перетворюємо обидва дроби на шості долі; маємо

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6},$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6},$$

$$\text{тому } \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

Так само, коли від $\frac{3}{4}$ ми повинні відняти $\frac{2}{3}$, то перетворюємо обидва дроби на дванадцяті долі; маємо

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12},$$

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12},$$

$$\text{отже } \frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}.$$

Так саме ми можемо переводити й ділення дробових чисел (по вміщенню), виражаючи їх для цього в однакових долях. Нехай, напр., нам треба розділити $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{8}$; перетворімо $\frac{1}{2}$ на восьмі долі — матимемо $\frac{4}{8}$; тому

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=\frac{4}{8}:\frac{1}{8}=4.$$

Як що нам треба поділити $7\frac{1}{2}$ на $\frac{3}{4}$, то перетворюємо спочатку $7\frac{1}{2}$ на неправильний дріб; маємо $\frac{15}{2}$. Щоб можна було розділити цей дріб на $\frac{3}{4}$, перетворюємо його на четверті долі; маємо $\frac{30}{4}$. Тепер ділимо $\frac{30}{4}$ на $\frac{3}{4}$ і знаходимо частку 10. Таким чином

$$7\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{15}{2}:\frac{3}{4}=\frac{30}{4}:\frac{3}{4}=10.$$

Нехай ще треба поділити $13\frac{1}{2}$ на $2\frac{1}{4}$. Перетворюємо спершу обидва дані числа на неправильні дроби — маємо $\frac{27}{2}$ і $\frac{9}{4}$. Тепер перетворюємо ще $\frac{27}{2}$ на четверті долі й маємо $\frac{54}{4}$; цей дріб ділимо на $\frac{9}{4}$ і маємо в частці 6. Отже

$$13\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}=\frac{27}{2}:\frac{9}{4}=\frac{54}{4}:\frac{9}{4}=6.$$

---

§ 13. Ділення дроба на ціле число за допомогою роздроблення доль.

Ми бачили вище, що при діленні дроба на ціле число треба поділити чисельник дроба на це ціле, а знаменник залишити без зміни; напр. $\frac{6}{7}:3=\frac{2}{7}$. Але як бути, коли чисельник не ділиться на дане число, напр., коли треба поділити $\frac{1}{2}$ на 3? Ми побачимо зараз, що це можна перевести за допомогою роздроблення доль.

Поділити $\frac{1}{2}$ на 3 — це значить знайти таку долю, яку треба взяти 3 рази, щоб одержати половину; але ж коли цих доль у половині 3, то в цілій одиниці їх буде 6, — тоб-то це будуть **шості** долі. Отже маємо

$$\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}.$$

Це ділення можна виявити наочно. На рис. 6 більший прямокутник означає нам цілу одиницю, а менший (що його обведено ширшою крайкою) — половину, поділену на три частини; і ми бачимо, що таких частин в усій одиниці 6, тоб-то $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$.

Рис. 6. $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$

В такий же спосіб поділім $\frac{1}{3}$ на 5. Це значить — знайти таку долю, яку треба взяти 5 разів, щоб одержати $\frac{1}{3}$; але коли таких доль в одній третині 5, то в цілій одиниці їх 15; отже це будуть п'ятнадцяті долі. Таким чином маємо

$$\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{15}.$$

І це можна виявити наочно. На рис. 7 менший прямокутник (з крайкою) утворює одну третину цілого; його поділено на 5 однакових частин (кліточок), яких в усьому прямокутнику 15; отже

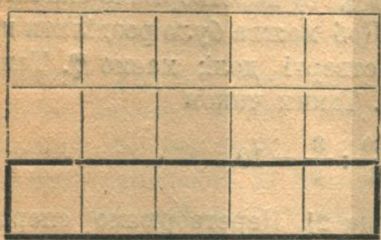


Рис. 7. $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{15}$

$$\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{15}.$$

На підставі таких прикладів робимо висновок, що *всяку долю одиниці можна в свою чергу поділити на кілька рівних частин; для цього досить помножити знаменник даної долі на дане число.*

Знаючи це, ми можемо ділити на ціле число не тільки якусь долю одиниці, а й взагалі будь-який дріб.

Нехай, напр., треба поділити $\frac{3}{4}$ на 5; поділімо спочатку $\frac{1}{4}$ на 5, матимем $\frac{1}{20}$. Але-ж коли після ділення кожної чверті на 5 ми одержуємо 1 двадцяту, то від ділення 3 чвертей на 5 ми повинні мати вже 3 двадцятих, тоб-то

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$$

Таким же чином, щоб поділити $\frac{7}{10}$ на 3, ми повинні поділити спочатку $\frac{1}{10}$ на 3; матимем $\frac{1}{30}$. А після ділення 7 десятих на 3 матимемо вже 7 тридцятих, тоб-то

$$\frac{7}{10} : 3 = \frac{7}{30}$$

Отже бачимо, що *коли треба поділити дріб на ціле число, а чисельник дроба на нього не ділиться, то досить помножити знаменник дроба на це ціле число, а чисельник лишити без зміни.*

§ 14. Скорочення дробів. Основна властивість дроба.

Ми бачили вище (§ 12), що всякий дріб можна перетворювати на дрібніші долі, не зміняючи його величини; напр.:

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{15},$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8},$$

$$\frac{5}{6}=\frac{20}{24}, \text{ і т. ин.}$$

Зараз побачимо, що бувають випадки, коли можна, навпаки, перетворити даний дріб на значніші долі.

Візьмімо, напр., дріб $\frac{5}{10}$ і подивімося, чи не складає він якоїнебудь долі одиниці: в цілій одиниці 10 десятих, тому дріб 5 десятих міститься в одиниці рівно 2 рази, тоб-то він рівний одній половині

$$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Це можна показати наочно на рисунку (див. рис. 8); ми бачимо, що менший прямокутник (який обведено крайкою) складає $\frac{5}{10}$ цілого й одночасно половину його; ясно, що $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. Ми таким чином перетворили дріб $\frac{5}{10}$ на значніші долі, не зміняючи його величини (як у свій час перетворювали іменовані числа на значніші міри); це перетворення зветься **скороченням дроба**.

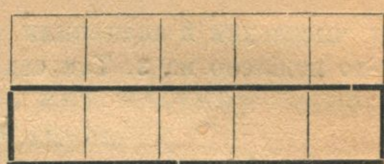


Рис. 8. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

Нехай тепер ми маємо дріб $\frac{9}{12}$. Цей дріб не складає ніякої долі одиниці, бо 9 дванадцятих не містяться в цілій одиниці (в 12 дванадцятих) цілого числа разів. Але звернім увагу на те, що 3 дванадцяті рівні 1 чверті, бо в цілій одиниці (в 12 дванадцятих) вони містяться рівно 4 рази; коли ж 3 дванадцяті рівні 1 чверті, то 9 дванадцятих складають 3 чверті:

$$\frac{9}{12}=\frac{3}{4} \text{ (див. рис. 9).}$$

В такий же спосіб ми могли б знайти, що

$$\frac{6}{9}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}, \text{ і т. ин.}$$

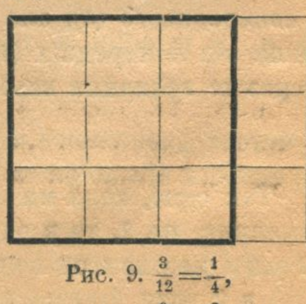


Рис. 9. $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

Очевидно, після скорочення дробу його чисельник і знаменник будуть меншими числами, ніж раніше; тому ми можемо сказати, що скоротити дріб—це значить перетворити його на простіший вигляд, не зміняючи його величини. Зараз побачимо, як найпростіше переводиться скорочення дробів.

Звернім увагу на те, що робиться з чисельником і знаменником дроба, коли ми перетворюємо його на дрібніші або значніші долі, не зміняючи його величини.

Ми бачили, напр., що

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8};$$

ясно, що тут чисельник й знаменник даного дробу збільшено в 3 рази,—тоб-то помножено на 2.

Так само ми бачили, що

$$\frac{5}{6}=\frac{20}{24};$$

тут чисельник й знаменник даного дробу збільшено в 4 рази,— ітоб-то помножено на 4.

Навпаки, при скороченні дробів ми бачили, що

$$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

Тут чисельник й знаменник даного дробу зменшено в 3 рази, тоб-то поділено на 3. Так само ми мали, що

$$\frac{8}{10}=\frac{4}{5};$$

тут чисельник й знаменник першого дробу зменшено в 2 рази, тоб-то поділено на 2.

На підставі подібних прикладів ми можено зробити такий висновок: як що ми чисельник й знаменник даного дробу одночасно помножимо або поділимо на однакові числа, то величина дробу не зміняється. Зараз пересвідчимося, через що це повинно так бути. Коли маємо, напр., дріб $\frac{3}{4}$ і помножимо його чисельник і знаменник на 5, то дістаємо дріб $\frac{15}{20}$, в якому число доль (15) стало в 5 разів більшим од попереднього (3), але ж кожна доля зокрема (20-та) в 5 разів менша від попередніх (4-тих), тому що в 1 четвертій 5 двадцятих; і через те величина всього дробу залишається остаточно без зміни:

$$\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$$

Так само, коли ми маємо дріб $\frac{6}{10}$ і поділимо його чисельник і знаменник на 2, то в одержаному дробові $\frac{3}{5}$ число доль (3) стало в 2 рази меншим од попереднього (6), але кожна окрема доля (5-та) в 2 рази більша від попередньої (10-тої), бо 1 п'ята містить 2 десятих; і таким чином величина всього дробу не зміняється:

$$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Ця властивість дробу, яку ми допіру встановили, зветься **головною властивістю дробу**; користуючися з неї, ми можемо дуже просто скорочувати дроби, як зараз побачимо.

Візьмімо, напр., дріб $\frac{12}{15}$; бачимо, що його чисельник й знаменник можна розділити одночасно на 3, і після цього маємо дріб $\frac{4}{5}$, який рівний даному:

$$\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

Так само в дробові $\frac{28}{40}$ можна поділити чисельник й знаменник на 4, і після цього дістаємо дріб $\frac{7}{10}$, рівний даному:

$$\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$$

Тепер ясно, що **для скорочення дробу досить поділити його чисельник й знаменник на однакові числа**. Коли ми хочемо означити, на яке саме число ми скорочуємо чисельник й знаменник, то записуємо це число в скобочці так:

$$\frac{28}{40}\overset{4}{\smile}\!=\frac{7}{10}.$$

---

§ 15. Задачі, де треба знайти, яку частину одного числа складає друге.

Розгляньмо таку задачу:

Поштареві треба проїхати 20 верстов; він проїхав уже 15 верстов. Яку частину всієї подорожі він зробив?

Міркуємо так: всього поштареві потрібно проїхати 20 верстов, тому кожна верства складає $\frac{1}{20}$ частину його подорожі, а 15 верстов складають $\frac{15}{20}$ всієї подорожі, або, після скорочення, $\frac{3}{4}$ її

Ось ще задача:

Від мотуза в 24 аршини завдовжки відрізали 9 арш. Яку частину всього мотуза відрізано?

Як що відрізали б 1 аршин, то це була-б, очевидно, $\frac{1}{24}$ частина всього мотуза, а 9 арш. складають $\frac{9}{24}$ всього мотуза, або инакше $\frac{3}{8}$.

Візьмімо ще таку задачу:

В мішку був 1 пуд борошна; з нього витратили 17 фунтів. Яку частину всього борошна витрачено?

В одному пуді 40 фунтів, тому кожен фунт становить $\frac{1}{40}$ частину всього борошна; а 17 фунтів складатимуть $\frac{17}{40}$, — тоб-то витрачено $\frac{17}{40}$ усього борошна.

Зміркуймо тепер, чи не можна в подібних випадках діставати вислід коротше. Для цього розгляньмо поруч ті висліди, які допіру одержано:

15 верстов од 20 складають $\frac{15}{20}$

9 аршинів од 24 . . . . . $\frac{9}{24}$

17 фунтів од 40 . . . . . $\frac{17}{40}$

Тут в усіх задачах питалося, яку частину складає одно число від другого, і ми бачимо, що відповідь на це запитання ми дістаємо дуже просто: досить написати дріб, у якому перше число було б чисельником, а друге знаменником.

Так напр.:

30 од 36 складають $\frac{30}{36}\left(\text{або } \frac{5}{6}\right)$

7 од 21 . . . . . $\frac{7}{21}\left(\text{або } \frac{1}{3}\right)$

29 од 100 . . . . . $\frac{29}{100}$, і т. ин.

Наш висновок можна висловити й инакше. Ми бачили вище (§ 8), що кожен дріб можна вважати за частку від ділення його чисельника на знаменник; напр. $\frac{17}{40} = 17 : 40$, $\frac{30}{36} = 30 : 36$, і т. ин. Тому ясно, що питання про те, яку частину складає одно число від другого, можна розвязати просто діленням першого числа на друге.

Такі питання трапляються по задачах досить часто, але не завжди це буває безпосереднє зазначено в умові. Ось, напр., задача:

Пароплав пропливає 12 верстов що-години; скільки йому потрібно часу, щоб проплисти 9 верстов?

Міркуємо так: коли пароплав пропливає 12 верстов у годину, то на 1 верству йому буде потрібно в 12 разів менше часу, тоб то $\frac{1}{12}$ години; а на 9 верстов—у 9 разів більше, як на одну, тоб то $\frac{9}{12}$ (або $\frac{3}{4}$) години.

Бачимо, що й в цій задачі вислід $\frac{9}{12}$ ми могли безпосереднє одержати з даних чисел шляхом ділення ($9 : 12 = \frac{9}{12}$), і ясно через що: коли пароплав у годину робить 12 верстов, то на проїзд 9 верстов йому буде потрібна не ціла година, а така частина години, яку складають 9 верстов од 12 ти,—тоб-то $\frac{9}{12}$.

Візьмімо таку задачу:

Фунт масла коштує 40 тисяч; скільки масла можна купити за 25 тисяч?

Ми можемо розміркувати так: коли фунт масла коштує 40 тисяч, то за 1 тисячу можна купити $\frac{1}{40}$ фунта цього масла, а за 25 тисяч — $\frac{25}{40}$, або $\frac{5}{8}$ фунта.

Але можна міркувати й инакше: за 25 тисяч, очевидно, не можна купити цілого фунта масла, а тільки частину його, і саме таку, яку складають 25 тисяч од 40 тисяч, тоб-то $25 : 40 = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$. Таким чином і тут ми могли б одразу розвязати нашу задачу, поділивши дані числа.

Завважмо, що з задачами такого змісту ми зустрічалися й раніше, коли виучували цілі числа, і розвязували ми ці задачі також діленням. Справді, візьмімо знову першу з задач, що ми допіру розвязали, тільки зо зміненими числами:

Пароплав пропливає 12 верстов що-години; скільки йому потрібно часу, щоб проплисти 60 верстов?

Ясно, що на це пароплаву буде потрібно стільки годин, скільки разів у 60 верстах містяться 12 верстов, цеб-то $60 : 12 = 5$.

Таким же чином змінім числа у другій задачі:

Фунт масла коштує 40 тисяч; скільки масла можна купити за 120 тисяч?

Очевидно, за ці гроші можна купити стільки фунтів масла, скільки разів у 120 тис. містяться 40 тис., тоб-то $120 : 40 = 3$.

Знаючи це, ми можемо надалі розвязувати такі задачі діленням, незалежно від того, чи при цьому в частці маємо одержати ціле, чи дробове число. Напр., коли б у першій задачі пароплав мав проплисти 42 верстви, то число годин, що потрібні йому на подоріж, буде

$$42 : 12 = 3\frac{6}{12} = 3\frac{1}{2}.$$

Коли б у другій задачі ми схотіли знайти, скільки фунтів масла можна купити за 90 тисяч, то мали б

$$90 : 40 = 2\frac{10}{40} = 2\frac{1}{4}.$$

Очевидно, в таких задачах ми шукаємо й знаходимо одно з двох: або *скільки разів в одному даному числі міститься друге*, або *яку частину складає одно число від другого*. Число, що зазначає це, ми звемо *відношенням* двох даних чисел (іменованих або абстрактних); як ми бачили, його можна знайти за допомогою *ділення першого числа на друге*, цеб-то воно буде, инакше, часткою даних чисел.

Так, напр., відношення 96 верстов до 12 верстов рівняється $96 : 12$, цеб-то 8; воно означає, що в 96 верствах 12 верстов містяться рівно 8 разів.

Відношення 66 верстов до 12 верстов буде 66 : 12, або $5\frac{1}{2}$; воно показує, що в 66 верствах 12 верстов містяться $5\frac{1}{2}$ разів (тоб-то 5 разів з остачою, рівною половині від 12-ти).

Нарешті, відношення 2 верстов до 12 верстов рівнятиметься 2 : 12, тоб-то $\frac{2}{12}$ або $\frac{1}{6}$; воно показує, що 2 верстви складають $\frac{1}{6}$ частину від 12 верстов.

Тепер ми можемо з'ясувати собі остаточно, яке значіння мають дробові числа в аритметиці: вони дають нам можливість, по-перше, вимірювати ріжні величини не тільки цілими одиницями міри, але й будь-якими їх частинами;

по-друге, після введення дробових чисел стає завжди можливим ділення двох цілих чисел—як у випадку поділу на рівні частини, так і в випадку обчислення відношення двох чисел.

Відділ II.

Десяткові дроби та найпростіші дії з ними.

§ 16. Поняття про десятковий дріб. Записування десяткових дробів за допомогою протинки.

При ознайомленні з метричними мірами ми бачили, що основна одиниця довжини—метр—ділиться на 10 рівних частин—десіметрів; кожен десіметр ділиться теж на 10 рівних частин—сантіметрів, а кожен сантіметр теж на 10 рівних частин—міліметрів; таким чином десіметр є одна десята доля метра, сантіметр—одна сота, міліметр—одна тисячна.

В такий же спосіб і сажінь в техничних розрахунках поділяють найчастіше не на аршини й вершки, а на десяті й соті долі; цей поділ помічається, напр., на мірних стрічках рулеток.

В грошових розрахунках ми також поділяємо карбованець на соті долі—копійки, та десяті — десятикопіешники; відро, як міра лійкого, поділяється також на десяті й соті долі, і т. ин. Одно слово, при вимірюваннях і розрахунках часто доводиться поділяти одиницю на 10, 100, 1000 і т. д. доль, і складати дроби з цих доль—десятих, сотих, тисячних і т. д.; напр. довжина в 5 метрів і 3 десіметри утворює, иншими словами, 5 цілих і 3 десятих ($5\frac{3}{10}$) метра; довжина в 1 метр і 87 сантиметрів складає инакше 1 цілий і 87 сотих ($1\frac{87}{100}$) метра.

Дроби, що їх складено з десятих, сотих, тисячних і т. д. доль, звуться **десятковими**. Ми зараз побачимо, що десяткові дроби можна записувати скороченим способом на зразок цілих чисел.

Візьмім яке-небудь многоцифорне число, напр. 4263; в ньому перша цифра означає, як відомо, тисячі, друга — сотні, третя— десятки, четверта—одиниці,—взагалі, *кожна наступна цифра праворуч означає десяткові одиниці в 10 разів дрібніші від попередньої.*

Зміркуймо, чи не можна поширити це саме правило й на запис десяткового дробу. В такому випадку нам доведеться праворуч од цілих одиниць зазначати ті долі, що в 10 разів меньші від цілих, тоб-то десяті долі; праворуч од десятих — ті долі, що в 10 разів менші за десятих, тоб-то соті; праворуч од сотих—ті долі, що в 10 разів менші за сотих, тоб-то тисячні, і т. д. При цьому цілі одиниці ми відділяємо від дробових доль **протинкою**[1]), напр. 5 цілих і 3 десятих означаємо так:

5,3

Щоб означити 1 цілу й 87 сотих, міркуємо, що 10 сотих складають 1 десяту, а 80 сотих—все їдно, що 8 десятих; тому в нашому числі всього 1 ціла, 8 десятих та 7 сотих, і це доведеться записати так:

1,87

Як що цілих одиниць зовсім немає, то на їхньому місці ставиться нуль; напр. 7 десятих ми запишемо так:

0,7

і прочитаємо це: „нуль цілих сім десятих", або простіше: „сім десятих". Так само пишеться нуль там, де зовсім немає доль якого небудь порядку; запишімо, напр, дріб 45 тисячних; тут маємо 5 тисячних і ще 40 тисячних, або 4 сотих, а десятих і цілих немає зовсім; тому доведеться написати 0 цілих, потім 0 десятих, 4 соті й 5 тисячних, а саме

0,045

Щоб навчитися як слід означати десятковий дріб, ми повинні вміти розраховувати, скільки в цьому дробові буде цілих, десятих, тисячних і т. ин. доль, а для цього треба добре пам'ятати, що кожна з цих доль складається з десятьох доль наступного нижчого порядку, а саме:

1 ціла одиниця—все їдно, що				10 десятих,
1 десята	„	„	„	10 сотих,
1 сота	„	„	„	10 тисячних,
1 тисячна	„	„	„	10 десятитисячних,
1 десятитисячна	„	„	„	10 стотисячних,
1 стотисячна	„	„	„	10 мілійонових і т. д.

Крім цього, треба пам'ятати, на якому місці після протинки пишуться ті або инші долі; очевидно,

десяті	долі	пишуться	на першому місці після протинки,
соті	„	„	на другому,
тисячні	„	„	на третьому,
десятитисячні	„		на четвертому,
стотисячні		„	на п'ятому,
мілійонові		„	на шостому і т. д.

---

[1]) Инколи замісць протинки ставлять у запису десяткового дробу крапку; напр., замісць 5,3 пишуть 5.3 (так само, як у комерційних розрахунках замісць 18 карб. 33 коп. пишуть: карб. 18.33); але цей спосіб запису не такий зручний, бо крапку можна помилково вважати й за знак множення.

Нехай, напр., ми повинні записати 327 тисячних. З огляду на те, що 10 тисячних складають одну соту, ми маємо тут 32 сотих і 7 тисячних; а 10 сотих складають одну десяту, тому маємо всього 3 десятих, 2 сотих й 7 тисячних, а цілих нема,—і це доведеться записати так:

0,327

Напишімо тепер 2538 стотисячних. Кожні 10 стотисячних складають одну десятитисячну, тому ми маємо тут 253 десятитисячних й 8 стотисячних; але ж кожні 10 десятитисячних складають одну тисячну, тому в 253 десятитисячних буде 25 тисячних і 3 десятитисячних. В свою чергу 25 тисячних утворюють, очевидно, 2 сотих і 5 тисячних, і ми маємо остаточно 2 сотих, 5 тисячних, 3 десятитисячних та 8 стотисячних. Цілих одиниць і десятих доль тут немає; значить наш дріб буде записано так:

0,02538

Напишімо ще 542 сотих. Кожні 10 сотих складають одну десяту, тому тут маємо 54 десятих й 2 сотих; в свою чергу 10 десятих утворюють одну цілу одиницю, значить ми маємо всього 5 цілих, 4 десятих й 2 сотих. Це записується так:

5,42

Подивімося тепер, чи не можна на підставі цих прикладів установити яко мога короткого правила записування десяткових дробів. Для цього поставмо поруч дроби, що їх ми допіру розглядали:

327 тисячних 0,327

2538 стотисячних . . . 0,02538

542 сотих 5,42

Очевидно, чисельник записується кожного разу без зміни, а знаменник означається за допомогою протинки: в першому прикладі нам дані тисячні долі, і остання цифра стоїть на третьому місці після протинки; в другому прикладі маємо стотисячні долі, і остання цифра—на п'ятому місці після протинки; в третьому прикладі—соті долі, і остання цифра—на другому місці. Ясно, що кожного разу *ми записуємо чисельник дробу, як ціле число, а потім ставимо протинку так, щоб остання цифра числа означала долі, які зазначені в знаменнику;* як що при цьому не вистачить цифр у даному числі, то заповняємо потрібні місця нулями.

Напр., нехай треба написати 208 десятитисячних. Десятитисячні долі пишуться на четвертому місці після протинки; тому ми повинні написати чисельник 208 і поставити протинку так, щоб після неї опинилися чотирі цифри; для цього доведеться попереду числа 208 поставити нуль, а перед ним протинку, та ще перед нею означити 0 цілих, і ми матимемо:

0,0208

Таким же чином записали б

1594 стотисячних 0,01594

37 мілійонових . . . . . . 0,000037, і т. ин.

Слід взяти на увагу, як записуються долі окремих десяткових порядків, а саме:

1 десята 0,1
1 сота 0,01
1 тисячна 0,001
1 десятитисячна 0,0001
1 стотисячна 0,00001
1 мілійонова 0,000001
і т. д.

В такий же спосіб міркуємо й при читанні десяткових дробів. Напр., щоб прочитати дріб

0,43

міркуємо, що тут цілих нема, а далі написано 4 десятих та 3 сотих, або всього 43 сотих; значить весь дріб треба прочитати так:

0 цілих 43 сотих, або коротше просто—43 сотих.

Коли написано

0,388

то міркуємо, що тут є 0 цілих, 3 десятих, 8 сотих і 8 тисячних; але в одній десятій 10 сотих, тому в 3 десятих маємо 30 сотих, а всього разом 38 сотих; в кожній сотій 10 тисячних, тому в 38 сотих маємо 380 тисячних, та ще 8—всього 388 тисячних. Таким чином наш дріб 0,388 треба прочитати так:

388 тисячних.

Таким же чином число 2,209 доведеться прочитати так:

2 цілі 209 тисячних,

або на зразок неправильного дробу—

2209 тисячних;

число 0,00012 прочитаємо так:

12 стотисячних, і т. ин.

Очевидно, при читанні десяткового дробу ми читаємо дане число так, ніби воно було цілим, а потім називаємо, які це в нас означено долі.

Ми бачимо таким чином, що десятковий дріб доводиться записувати й читати майже так само, як і ціле число; через те десятковий дріб, особливо неправильний, инколи звуть просто **десятковим числом**.

§ 17. Порівняння десяткових дробів по величині. Зведення десяткових дробів до спільного знаменника й скорочення їх. Основна властивість десяткового дробу.

Нехай нам треба порівняти поміж собою такі дроби:

$$0{,}79$$
$$0{,}783$$
$$0{,}7412$$

Ми бачимо, що цілих одиниць тут немає, а десятих скрізь порівну—по 7; крім цього маємо в першому дробові 9 сотих доль, в другому 8 з лишком, але менш од 9, а в третьому 4 з лишком, тоб-то в усякому разі менш од 5 сотих. Тому ясно, що перший дріб більший за другого, а другий більший за третього.

Таким чином ми бачимо, що можна порівняти десяткові дроби по величині й не зводячи їх до спільного знаменника, як це ми робили зо звичайними дробами; ми тільки порівнюємо, скільки буде в кожному з них доль найвищого порядку; де більше цих доль, той дріб і буде більшим. Як що доль найвищого порядку буде порівну, то розглядаємо долі наступного порядку й т. д.

Візьмімо тепер дріб 0,3 і припишімо до нього з правого боку нуль; матимем 0,30. Порівняймо ці два дроби. В них цілих одиниць немає, а десятих доль порівну—по 3; сотих же доль або ще инших яких-небудь зовсім немає; тому ясно, що обидва дроби що-до величини однакові:

$$0{,}3 = 0{,}30$$

Це можна з'ясувати собі й инакше: одна десята містить 10 сотих, тому 3 десятих—все рівно, що 30 сотих.

Допишімо тепер до нашого дробу з правого боку ще один нуль; матимем 0,300. Порівняймо дроби 0,3 і 0,300. Як і в попередньому прикладі, цілих тут немає, десятих порівну—по 3, а сотих та инших доль немає зовсім; через те й ці дроби однакові по величині:

$$0{,}3 = 0{,}300$$

І це можна дістати инакше, з такого розрахунку: одна десята містить десять сотих або 100 тисячних, тому 3 десятих рівні 300 тисячним.

В такий же спосіб ми можемо знайти, що

$$0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000 \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$0{,}76 = 0{,}760 = 0{,}7600 = 0{,}76000 \; . \; . \; . \; . \; .$$

тоб-то *величина десяткового дробу не зміняється, коли ми допишемо до нього з правого боку один або де-кілька нулів.*

Можна пересвідчитися, через що воно повинно так бути. Коли напр., ми маемо дріб 0,43 і дописуємо до нього з правого боку два нулі, то в дробові 0,4300, який ми після цього одержуємо, і чисельник і знаменник більші від попередніх в однакове число разів (в 100 разів), а через те й величина дробу не зміняється.

Знаючи цю властивість десяткових дробів, ми можемо, коли треба буде, дуже просто зводити їх до спільного знаменника. Нехай, напр., у нас є дроби 0,52 і 0,512. Перший з них виражено в сотих долях, другий—у тисячних; але ми можемо до першого дописати нуль, і він буде теж виражений в тисячних долях: 0,520.

Таким же чином, маючи дроби 0,34 і 0,3813, ми можемо звести їх до спільного знаменника, дописавши до першого два нулі; матимем 0,3400 і 0,3813. Обидва дроби виражено тепер в однакових долях—десятитисячних.

Ясно, що для зведення десяткових дробів до спільного знаменника досить вирівняти в них число цифр після протинки, дописуючи з прав-ого боку потрібну кількість нулів.

Ми знайшли допіру, що до десяткового дробу можна дописати з правого боку один або кілька нулів, не зміняючи його величини. Але коли так, то можна й навпаки, відкинути в десятковому дробу нулі, які стоять з правого боку; напр. 0,50 все їдно, що 0,5, бо в кожному з цих дробів по 5 десятих, а инших доль зовсім немає. Це можна перевірити й инакше. Коли ми в даному дробу 0,50 відкинули з правого боку нуль, то в одержаному дробові 0,5 і чисельник і знаменник менші за попередніх в однакове число разів (в 10 разів), і тому величина дробу не зміняється.

Таким же чином ми знайшли б

$$0{,}4200 = 0{,}42$$
$$0{,}7000 = 0{,}7$$

і т. ин.

Але з другого боку, заміняючи, напр., дріб 0,4200 рівним йому дробом 0,42, ми виражаємо його в значніших долях (сотих), не зміняючи його величини; инакше кажучи, ми скорочуємо дріб 0,4200, одкидаючи нулі, що стоять з правого боку. Отже, як що десятковий дріб закінчується одним абоількома нулями, то ми можемо скоротити його, відкидаючи ці нулі.

Звернімо ще увагу ось на що. Ми встановили тут, що величина десяткового дробу не зміняється, коли до нього дописати з правого боку один або кілька нулів, або навпаки, відкинути нулі, що стоять з правого боку, і бачили, що це повстає через те, що при цьому й чисельник і знаменник дробу збільшуються або зменшуються в однакове число разів. Таким чином ясно, що ця властивість є окремий випадок основної властивости дробу, яку ми розглянули вище (§ 14); ми звемо її через те основною властивістю десяткового дробу.

---

§ 18. Додавання десяткових чисел.

1) Усне додавання. Нехай нам треба до 0,7 додати 0,38; ми обчисляємо це так: „7 десятих та 3 десятих—буде 10 десятих, або 1 ціла одиниця; та ще 8 сотих—всього разом 1 ціла й 8 сотих“; таким чином маємо

$$0,7+0,38=1,08$$

Ще приклад: нехай треба додати 0,52 і 0,27. Обчисляємо це так: „52 сотих та 20 сотих—72 сотих; та ще 7 сотих—79 сотих“, цеб-то

$$0,52+0,27=0,79$$

В останньому прикладі можна обчисляти, звичайно, й инакше: 5 десятих і 2 десятих—7 десятих; 2 сотих й 7 сотих—9 сотих; всього разом 7 десятих і 9 сотих, або 0,79.

Бачимо, що усне обчислення десяткових дробів переводиться так само, як і усне обчислення цілих чисел: ми додаємо другий доданок частинами (найчастіше по окремих десяткових порядках), починаючи додавання з доль вищого порядку.

2) Писане додавання. Нехай, напр., ми повинні додати 5,283 і 2,844. Ми можемо й тут перевести додавання так, як додавали в свій час цілі многоциферні числа: ми підпишемо наші доданки один під другим так, щоб долі однакових порядків стояли в тому самому стовпчику:

$$\begin{array}{r} 5,283 \\ +\,2,844 \\ \hline 8,127 \end{array}$$

і додаватимем дані числа по окремих порядках, починаючи з найнижчих доль—з тисячних. Обчисляємо, це так: 4 тисячних й 3 тисячних—7 тисячних; далі додаємо соті долі: 4 та 8—12 сотих, або 2 сотих й 1 десята; підписуємо під сотими 2, а 1 десяту додаємо до десятих: 1 десята та 8—9, та ще 2—11 десятих, або 1 десята й 1 ціла. Пишемо під десятими 1, а 1 цілу одиницю додаємо до цілих: 1 та 2—3, та ще 5—всього 8. Пишемо ці 8 під цілими й маємо остаточно суму 8,127.

В такий же спосіб обчисляємо й суму кількох доданків, напр.:

$$
\begin{array}{r}
0,866 \\
+\,2,34 \\
3,092 \\
0,282 \\
4,02 \\
\hline
10,600 \\
\hline
10,6
\end{array}
$$

Спочатку додаємо тисячні долі й одержуємо 10 тисячних, або 1 соту; пишемо під тисячними 0, а 1 соту додаємо до сотих; маємо всього 30 сотих, або 3 десятих без сотих; пишемо під сотими 0, а 3 десятих додаємо до десятих; знаходимо в сумі 16 десятих, або 6 десятих і 1 цілу. Пишемо під десятими 6, а 1 цілу додаємо до цілих; всього маємо 10 цілих, і записуємо під цілими 0, а на наступному місці ліворуч—1 десяток. Таким чином знаходимо суму 10,600, або після скорочення 10,6

Завважмо, що ми могли б і з самого початку не записувати нулів на місці тисячних і сотих, бо через це величина висліду не зміняється; ми знайшли б тоді відразу скорочену суму 10,6.

На підставі останнього прикладу ми бачимо, що **при додаванні десяткових дробів не є необхідним зводити їх до спільного знаменника**—досить тільки підписати їх так, щоб долі однакових порядків стояли в тих самих стовпчиках, і додавати дані числа по окремих порядках десяткових доль. Але инколи буває корисним все ж таки звести доданки до спільного знаменника, дописуючи де треба додаткові нулі; це робиться тоді, коли доданків чимало, і зведення їх до спільного знаменника може полекшити правильне підписування доль однакових порядків; напр.,

замісць:

$$
\begin{array}{l}
0,36 \\
+\,1,5092 \\
2,1 \\
3,17 \\
0,0128 \\
\hline
7,1520 \\
\hline
7,152
\end{array}
$$

можемо записати

$$
\begin{array}{r}
0,3600 \\
+\,1,5092 \\
2,1000 \\
3,1700 \\
0,0128 \\
\hline
7,1520 \\
\hline
7,152
\end{array}
$$

---

§ 19. Віднімання десяткових чисел.

1) *Усне віднімання.* Нехай, напр., нам треба від 0,83 відняти 0,35; ми обчисляємо це так: 83 сотих без 30 сотих—53 сотих, та ще без 5—48 сотих, тоб-то

$$0,83 - 0,35 = 0,48$$

Таким же чином, коли від 1 треба відняти 0,24, то ми міркуємо так: 1 ціла без 2 десятих—8 десятих, та ще без 4 сотих—лишаються 7 десятих і 6 сотих, тоб-то

$$1 - 0{,}24 = 0{,}76$$

В останньому прикладі можна обчисляти й инакше: 1 ціла—все їдно, що 100 сотих; віднімаємо звідси 20 сотих—буде 80 сотих; далі віднімаємо ще 4 сотих й одержуємо 76 сотих, або 0,76.

Очевидно, що усне віднімання десяткових дробів переводиться цілком так само, як і усне віднімання цілих чисел: ми віднімаємо від'ємника окремими частинами, розкладаючи його при цьому на такі частини, щоб можна було перевести віднімання яко мога коротше й простіше; здебільшого ми віднімаємо від'ємника по окремих порядках десяткових доль, починаючи з вищих.

Завважмо, що й спосіб доповнення, з яким ми ознайомилися при усній відніманні цілих чисел, буде тут цілком придатним; напр., коли нам треба від 1,2 відняти 0,94, то ми можемо просто зміркувати, скільки треба додати до 94 сотих, щоб дістати 1 цілу й 2 десятих; міркуємо так: щоб мати 1 цілу, треба до 94 сотих додати 6 сотих; а крім цього треба мати ще 2 десятих, тому всього ми повинні додати 2 десятих і 6 сотих, або 0,26. Таким чином маємо

$$1{,}2 - 0{,}94 = 0{,}26$$

2) Писане віднімання. Нехай, напр., нам треба від 8,044 відняти 3,782. Підпишімо, як і при відніманні цілих многоциферних чисел, від'ємник під зменшеником так, щоб долі однакових порядків прийшлися в тих самих стовпчиках:

$$\begin{array}{r} \dot{8},\dot{0}44 \\ -\ 3,782 \\ \hline 4,262 \end{array}$$

і віднімаймо від'ємник по окремих порядках, починаючи з найнижчих доль—з тисячних. Обчисляємо так: 4 тисячних без 2 тисячних—2 тисячних; пишемо під тисячними 2. Далі від 4 сотих відняти 8 сотих не можна; треба було б узяти в зменшенику 1 десяту й додати її до 4 сотих, а потім відняти 8 сотих; але десятих в даному числі немає зовсім, тому беремо 1 цілу одиницю (зазначаємо це крапкою над цифрою 8), роздробляємо її на десяті долі—буде 10 десятих; з цих 10 десятих залишаємо 9, а одну десяту беремо (зазначаємо це крапкою над 0 на місці десятих) і роздробляємо на соті,—буде 10 сотих; та ще 4 сотих—всього разом 14 сотих. Звідси віднімаємо 8 сотих від'ємника, знаходимо 6 сотих, які й підписуємо під сотими. Далі віднімаємо 7 десятих од тих 9 десятих зменшеника, які залишилися в нас після роздроблення цілої одиниці; одержуємо 2 десятих й підписуємо їх під десятими. Нарешті віднімаємо 3 цілих від 7 цілих, що залишилися в зменшенику, і маємо 4 цілих. Таким чином знаходимо остаточно ріжницю 4,262.

В попередньому прикладі ми мали в зменшенику й від'ємнику долі однакових порядків; але цілком так само можна переводити віднімання й тоді, коли дані числа виражені в ріжних долях. Напр., нехай треба від 2,76 відняти 0,744:

$$\begin{array}{r} 2,7\dot{6} \\ -\ 0,744 \\ \hline 2,016 \end{array}$$

Підписавши дані числа так, щоб долі однакових порядків стояли в тому самому стовпчику, ми бачимо, що в зменшенику тисячних немає, а відняти треба 4 тисячних; тому беремо в зменшенику одну соту (ставимо крапку над 6 сотими) й роздробляємо її на тисячні долі—маємо 10 тисячних.

Звідси віднімаємо 4 тисячних й одержуємо 6 тисячних; далі від 5 сотих, що залишилися в зменшенику, віднімаємо 4 сотих й одержуємо 1 соту; від 7 десятих зменшеника віднімаємо 7 десятих і маємо 0 десятих, і нарешті від 2 цілих нема нічого віднімати—пишемо 2 на місці цілих і знаходимо остаточно ріжницю 2,016.

Ми бачимо таким чином, що при відніманні десяткових дробів, як і при додаванні, зведення їх до спільного знаменника не є обов'язковим; але коли ріжниця в числі десяткових порядків досить значна, то все ж буває зручним звести дані числа до спільного знаменника й для цього дописати куди слід потрібну кількість нулів.

Нехай, напр., нам треба від 3 відняти 0,7694; найзручніше буде перетворити 3 цілі на десятитисячні долі й записати це так:

$$\begin{array}{r} 3,\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0} \\ -\ 0,7694 \\ \hline 2,2306 \end{array}$$

---

§ 20. Множення десяткового числа на ціле.

1) Усне множення. Нехай, напр., нам треба помножити 0,48 на 3. Ми можемо обчислити це так: 40 сотих на 3—120 сотих; 8 сотих на 3—24 сотих; а всього разом буде 144 сотих, або 1 ціла й 44 сотих. Таким чином маємо

$$0,48 \times 3 = 1,44$$

Таким же чином, множачи 0,225 на 4, міркуємо так: 200 тисячних на 4—800 тисячних; 25 тисячних на 4—100 тисячних; всього разом—900 тисячних, або 9 десятих. Отже

$$0{,}225 \times 4 = 0{,}900 = 0{,}9$$

Очевидно, в подібних випадках ми можемо перевести множення частинами, як це робили при множенні цілих чисел: ми розкладаємо множеника на окремі доданки—здебільшого на його десяткові порядки (48 сотих = 40 сот. + 8 сот.; 225 тисячних = 200 тисячн. + 25 тисячних), і множимо кожен доданок зокрема, починаючи з вищих порядків; потім додаємо всі одержані висліди.

Заслуговують особливої уваги ті випадки множення, коли множителем буде число 10, 100, 1000 й т. ин., взагалі число, яке означено одиницею з нулями. Нехай, напр., нам треба помножити 0,073 на 10; ми міркуємо при цьому так: помножмо спочатку 1 тисячну на 10—матимем 10 тисячних, або 1 соту; тому, множачи 73 тисячних на 10, ми повинні мати 73 сотих, тоб-то

$$0{,}073 \times 10 = 0{,}73$$

Помножмо тепер 0,073 на 100; коли б ми помножили 1 тисячну на 10, то дістали б 100 тисячних, або 1 десяту; тому після множення 73 тисячних на 100 ми дістанемо 73 десятих, або 7,3. Отже

$$0{,}073 \times 100 = 7{,}3$$

Помножмо ще 0,073 на 1000. Як що ми 1 тисячну помножимо на 1000, то матимем 1000 тисячних, або 1 цілу; тому після множення 73 тисячних на 1000 ми повинні дістати 73 цілі, або

$$0{,}073 \times 1000 = 73$$

Порівняймо тепер висліди, які ми одержали:

$$0{,}073 \times 10 = 0{,}73$$
$$0{,}073 \times 100 = 7{,}3$$
$$0{,}073 \times 1000 = 73$$

Бачимо, що в усіх випадках залишається без зміни дане число доль (73), а зміняється тільки їхня назва (знаменник): у першім випадку замісць тисячних доль маємо соті, в другім—десяті, в третім—цілі; в запису ж числа ця зміна знаменника відбувається пересуванням протинки праворуч—на одну, дві й три цифри.

В такий же спосіб ми могли б знайти, що

$$0{,}0006 \times 10 = 0{,}006$$
$$0{,}0006 \times 100 = 0{,}06$$
$$0{,}0006 \times 1000 = 0{,}6$$
$$0{,}0006 \times 10000 = 6, \text{ і т. ин.}$$

На підставі таких обчислень можемо зробити висновок: щоб помножити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., досить пересунути в нього протинку праворуч на стільки цифр, скільки нулів у множителі. Як що при цьому в даному дробові не вистачить цифр десяткових порядків, то дописуємо відповідну кількість нулів; напр.

$$2{,}3 \times 1000 = 2{,}300 \times 1000 = 2300$$

Таким же чином можемо множити десятковий дріб і на ціле число, що означено якою-небудь цифрою з нулями, напр., на 30, на 600, на 8000 і т. ин.

Нехай, напр., нам треба помножити 0,14 на 30. Це все їдно, що спочатку помножити 0,14 на 3, а одержане число на 10:

$$0{,}14.3 = 0{,}42;\ 0{,}42.10 = 4{,}2;\ \text{отже}\ 0{,}14.30 = 4{,}2$$

Таким же чином, множачи 0,14 на 600, ми множимо дане число спершу на 6, а одержаний вислід на 100:

$$0{,}14.6 = 0{,}84;\ 0{,}84.100 = 84;\ \text{отже}\ 0{,}14.600 = 84.$$

Розглядаючи ще подібні приклади, ми бачимо, що при множенні десяткового дробу на таке ціле число (що його означено якоюсь цифрою з нулями) ми множимо спочатку на число, яке означено першою цифрою множителя, а далі пересуваємо протинку праворуч на стільки цифр, скільки нулів у множителі. Розуміється, ми можемо, коли схочемо, й змінити порядок цього обчислення; напр., множачи 0,003 на 8000, можемо спершу помножити даний дріб на 1000, а потім на 8:

$$0{,}003.1000 = 3;\ 3.8 = 24;\ \text{тому}\ 0{,}003.8000 = 24.$$

2) Писане множення. Нехай, напр., нам треба помножити 0,2966 на 7; як зараз побачимо, це множення можна перевести так, як ми робили в свій час множення цілих чисел—ми множитимем дане число частинами, починаючи з найнижчих доль, і додаючи окремі добутки, які ми при цьому одержуємо:

$$\begin{array}{c} \underline{0{,}2966.7} \\ 2{,}0762 \end{array}$$

Ми обчисляємо так:

7 разів по 6 десятитисячних — 42 десятитисячних, або 2 десятитисячних й 4 тисячних; пишемо 2 під десятитисячними, а 4 тисячних запам'ятаємо, щоб потім додати до тисячних;

7 разів по 6 тисячних—42 тисячних; та ще 4 тисячних—46 тисячних, або 6 тисячних і 4 сотих; пишемо 6 під тисячними, а 4 сотих запам'ятаємо;

7 разів по 9 сотих—63 сотих; та ще 4 сотих—67 сотих, або 7 сотих і 6 десятих; пишемо під сотими 7, а 6 десятих запам'ятаємо;

7 разів по 2 десятих — 14 десятих; та ще 6 десятих — 20 десятих, тоб-то 2 цілі й 0 десятих; пишемо під десятими 0, а поруч наліво 2 цілі, і маємо остаточно 2,0762.

Таким же чином переводимо дію й при множенні десяткового дробу на ціле многоциферне число. Нехай, напр., треба помножити 0,392 на 28:

$$
\begin{array}{r}
0{,}392.28 \\
\hline
3{,}136 \\
+\ 7{,}84 \\
\hline
10{,}976
\end{array}
$$

Обчисляємо так: щоб помножити 0,392 на 28, ми множимо дане число спочатку на одиниці множителя (на 8), потім на десятки (на 20), і додаємо числа, які одержуємо. Помноживши 0,392 на 8, маємо 3,136; підписуємо це число під множеником так, щоб долі однакових порядків стояли в одному стовпчику. Далі множимо 0,392 на 2 десятки; знаходимо 7,84 і підписуємо цей добуток під попереднім, при чому доглядаємо, щоб його цифри опинилися під відповідними долями попереднього, тоб-то щоб остання його цифра стояла під сотими долями. Додаючи тепер часткові добутки, маємо остаточно 10,976.

Помножмо ще 5,25 на 236:

$$
\begin{array}{r}
5{,}25.236 \\
\hline
31{,}50 \\
+\ 157{,}5 \\
1050 \\
\hline
1239{,}00 \\
\hline
1239
\end{array}
$$

Як і в попередньому прикладі, множимо спочатку 5,25 на одиниці множителя (на 6)—маємо 31,50; потім на десятки множителя (на 30)—знаходимо 157,5; і нарешті на сотні (на 200)—дістаємо 1050; тепер додаємо всі ці часткові добутки, і маємо остаточно 1239,00, тоб-то 1239 цілих.

Але можна міркувати при множенні десяткового дробу на ціле число й инакше. Нехай, напр., ми повинні помножити 0,335 на 216. Ми множимо тут 335 *тисячних* на 216; тому й в добутку будуть тисячні долі, а щоб знайти, скільки саме їх буде, треба помножити 335 на 216. Перемножаючи ці числа, як цілі, маємо

$$
\begin{array}{r}
0{,}335.216 \\
\hline
2010 \\
+\ 335 \\
670 \\
\hline
72.360 \\
\hline
72{,}36
\end{array}
$$

72360; але це число означає в нас *тисячні* долі, тому ми повинні поставити в ньому протинку так, щоб після неї було три цифри;

одержуємо 72,360, або після скорочення 72,36. При такому способі міркування ми не ставимо протинки в перемежних добутках, а тільки в остаточному висліді.

Завважмо, що при множенні десяткового числа на ціле придатні всі ті способи спрощеного множення, які встановлено при множенні цілих многоциферних чисел (ч. I, § 40).

Нехай, напр., нам треба помножити 0,544 на 135. Змірковуємо, що тут ми множимо 544 **т и с я ч н и х** на 135, а для цього доведеться

$$\begin{array}{r} 0{,}544.135 \\ \hline +\ 1632 \\ 2720 \\ \hline 73{,}440 \\ \hline 73{,}44 \end{array}$$

просто помножити 544 на 135 і добуток рахувати за тисячні долі. Множимо 544 на 135, як цілі числа, і при цьому вживаємо скороченого запису, бо перша цифра множителя є 1; дістаємо 73440. Стільки в нас буде **т и с я ч н и х**; отже остаточний добуток рівнятиметься 73,440, або після скорочення 73,44.

Помножмо ще 0,87 на 46. Тут ми множимо 87 **с о т и х** на 46; тому доведеться множити 87 на 46 і рахувати добуток за соті долі.

$$\begin{array}{r} 0{,}87 \\ \times\ 46 \\ \hline 40{,}02 \end{array}$$

Але множення 87 на 46 ми можемо перевести скорочено—„хрестиком"; маємо 4002,—значить остаточний вислід є 4002 сотих, або 40,02.

---

§ 21. Ділення десяткового (або цілого) числа на ціле.

1) **У с н е д і л е н н я.** Нехай напр. нам треба поділити 0,84 на 6. Ми можемо обчислити це так: 60 сотих поділити на 6—буде 10 сотих; 24 сотих на 6—4 сотих; всього ж 10 і 4—14 сотих, або

$$0{,}84 : 6 = 0{,}14.$$

Таким же чином, ділячи 0,235 на 5, ми міркуємо так: 200 тисячних поділити на 5—буде 40 тисячних; 35 тисячних на 5—7 тисячних; разом 40 та 7—47 тисячних, цеб-то

$$0{,}235 : 5 = 0{,}47$$

Бачимо, що в таких випадках ми можемо перевести ділення **ч а с т и н а м и**, як це робили при діленні цілих чисел. Одначе завважмо, що усне ділення буває зручним лише в випадках ділення, схожих на згадані вище, а саме коли число доль (чисельник дробу) ділиться без остачі на дане число; коли ж воно не ділиться, то зручнішим буде писане ділення, про яке сказано далі.

Заслуговують особливої уваги ще й ті випадки, коли доводиться ділити десяткове число (або ціле) на 10, 100, 1000 й т. д., взагалі на число, яке означається одиницею з нулями. Нехай, напр., ми повинні поділити 2,7 на 10. Міркуємо так: коли ми поділимо 1 десяту на 10 рівних частин, то матимем 1 соту; тому, поділяючи 27 десятих на 10, ми дістанемо 27 сотих, тоб-то

$$2{,}7 : 10 = 0{,}27$$

Поділімо тепер 2,7 на 100. Коли ми поділили б 1 десяту на 100 рівних частин, то одержали б 1 тисячну; тому після ділення 27 десятих на 100 ми повинні мати 27 тисячних, або

$$2{,}7 : 100 = 0{,}027$$

Поділімо ще 2,7 на 1000. Коли ми поділили б 1 десяту на 1000 рівних частин, то одержали б 1 десятитисячну; а після ділення 27 десятих на 1000 матимем 27 десятитисячних, тоб-то

$$2{,}7 : 1000 = 0{,}0027$$

Порівняймо тепер висліди, які ми тут одержали:

$$2{,}7 : 10 = 0{,}27$$
$$2{,}7 : 100 = 0{,}027$$
$$2{,}7 : 1000 = 0{,}0027$$

Бачимо, що в усіх випадках число доль (27) лишається без зміни, а міняється тільки їхня назва (знаменник): у першому випадку замісць десятих доль маємо соті, в другому—тисячні, в третьому—десятитисячні; в запису ж дроба ця зміна знаменника відбивається пересуванням протинки ліворуч—на одну, дві й три цифри.

В такий же спосіб ми могли б знайти, що:

$32{,}4 : 10 = 3{,}24$	$0{,}8 : 10 = 0{,}08$
$32{,}4 : 100 = 0{,}324$	$0{,}8 : 100 = 0{,}008$
$32{,}4 : 1000 = 0{,}0324$	$0{,}8 : 1000 = 0{,}0008$
$32{,}4 : 10000 = 0{,}00324$	$0{,}8 : 10000 = 0{,}00008$

На підставі подібних обчислень можемо зробити такий висновок: щоб поділити десятковий дріб на 10, 100, 1000 й т. ин., досить перемістити в нього протинку ліворуч на стільки цифр, скільки нулів у ділителі; як що при цьому в даному дробові недостачає цифр, то пишемо нулі на відповідних місцях, напр. 0,8 : 1000 = 0,0008.

Таким же чином міркуємо й тоді, коли діленик буде не десятковий дріб, а ціле число. Напр.:

$5 : 10 = 0{,}5$	$93 : 10 = 9{,}3$
$5 : 100 = 0{,}05$	$93 : 100 = 0{,}93$
$5 : 1000 = 0{,}005$	$93 : 1000 = 0{,}093$
$5 : 10000 = 0{,}0005$	$93 : 10000 = 0{,}0093$, і т. ин.

Бачимо, що й тут ми можемо знаходити вислід по попередньому правилу, коли рахувати, що в даному цілому числі розуміється протинка після цифри цілих одиниць.

Знаючи це правило, ми можемо в подібних випадках ділити десяткове або ціле число й на 20, 300, 5000 і т. ин., взагалі на число, означене якою-небудь цифрою з нулями.

Нехай, напр., нам треба поділити 0,84 на 20. Це все їдно, що поділити даний дріб на 2, а число, яке одержимо, на 10:

$$0{,}84 : 2 = 0{,}42;\ 0{,}42 : 10 = 0{,}042;\ \text{отже}\ 0{,}84 : 20 = 0{,}042$$

Як що нам треба поділити 3,6 на 300, то це все їдно, що поділити 3,6 спершу на 3, а одержане число на 100:

$$3{,}6 : 3 = 1{,}2;\ 1{,}2 : 100 = 0{,}012;\ \text{отже}\ 3{,}6 : 300 = 0{,}012$$

Нарешті, нехай ми повинні поділити 35 на 5000. Ділимо спершу 35 на 5, а потім одержану частку на 1000:

$$35 : 5 = 7;\ 7 : 1000 = 0{,}007;\ \text{тому}\ 35 : 5000 = 0{,}007$$

Розуміється, і це ділення ми можемо швидко перевести лише в тому випадку, коли дане число доль або цілих одиниць ділиться без остачі на першу цифру ділителя; коли ж ні, то доводиться вживати писаного ділення.

2) Писане ділення. Нехай нам треба поділити 0,3983 на 7; як зараз пересвідчимося, ми можемо перевести це ділення так, як у свій час переводили ділення цілих чисел—частинами, починаючи з доль найвищого порядку:

$$\begin{array}{r} 0{,}3983 : 7 = 0{,}0569 \\ \hline 48 \\ \hline 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

Міркуємо так: в ділeнику цілих одиниць немає, тому й в частці буде 0 цілих. Далі, коли ми ділитимем 3 десятих на 7 рівних частин, то на кожну частину не прийдеться жодної десятої долі;—тому пишемо в частці 0 десятих. Далі перетворюємо 3 десятих на соті долі,—буде 30 сотих; та ще в діленику 9 сотих, а всього 39 сотих; ділимо їх на 7 рівних частин і дістаємо в частці 5 сотих і в остачі 4 сотих. Цю остачу роздроблюємо на тисячні долі,—маємо 40 тисячних; та ще 8 тисячних діленика, всього разом 48 тисячних; ділимо їх на 7 рівних частин і знаходимо в частці 6 тисячних і в остачі теж 6 тисячних. Цю остачу перетворюємо на десятитисячні долі; маємо 60 десятитисячних, а разом з 3 десятитисячними діленика—63 десятитисячних. Ці 63 десятитисячних ділимо на 7 рівних частин і дістаємо на кожну частину 9 десятитисячних без остачі. Таким чином маємо остаточно частку 0,0569.

Нехай ще треба поділити 5,7592 на 23. Міркуємо так: коли

5,7592 : 23 = 0,2504
1 15
92
0

ми ділитимем 5 цілих на 25 рівні частини, то на кожну частину не припаде жодної цілої; пишемо в частці 0 цілих і перетворюємо 5 цілих на десяті долі; маємо 50 десятих, та ще 7 десятих у ділeнику, а разом 57 десятих. Ділимо ці 57 десятих на 23 рівні частини й одержуємо на кожну частину по 2 десятих, та ще 11 десятих в остачі. Ці 11 десятих перетворюємо на соті—буде 110 сотих; та ще 5 сотих у ділeнику, а всього разом 115 сотих. Ділимо тепер ці 115 сотих на 23 рівні частини й знаходимо в частці рівно 5 сотих. Далі в ділeнику є 9 тисячних; але коли ми їх ділитимем на 23 рівні частини, то на кожну частину не припаде жодної тисячної; тому пишемо в частці 0 тисячних, а наші 9 тисячних перетворюємо на десятитисячні; матимем 90 десятитисячних, а разом з 2 десятитисячними ділeника всього 92 десятитисячних. Ділимо їх на 23 рівні частини й одержуємо на кожну частину 4 десятитисячних без остачі. Отже частка буде 0,2504.

Досі ми розглядали такі приклади, коли дане число доль (чисельник дробу) ділилося на ділителя без остачі. Але це, звичайно, буває не завжди; тому зміркуймо, як бути в тих випадках, коли від ділення чисельника даного дробу маємо остачу.

Нехай, напр., нам треба поділити 3,4 на 8. Очевидно, цілих у

3,4 : 8 = 0,425
20
40
0

частці буде 0; далі ділимо 34 десятих на 8 і маємо в частці 4 десятих і в остачі 2 десятих. Ці 2 десятих роздроблюємо на соті—буде 20 сотих; ділимо 20 сотих на 8 і маємо в частці 2 сотих і в остачі 4 сотих. Далі перетворюємо ці 4 сотих на тисячні—маємо 40 тисячних; ділимо їх на 8 і дістаємо в частці 5 тисячних без остачі. Отже вся частка рівна 0,425.

Ось ще два приклади:

0,009 : 12 = 0,00075
903
60
0

5,607 : 14 = 0,4005
070
0

В першому прикладі очевидно, що в частці не буде ні цілих, ані десятих, ані сотих доль; тому пишемо в частці нулі на відповідних місцях. Далі пробуємо поділити 9 тисячних на 12; ясно, що в частці не буде й тисячних доль; пишемо в частці 0 тисячних, а 9 тисячних діленика перетворюємо на десятичні долі й маємо 90 десятитисячних. Ділимо їх на 12 і знаходимо в частці 7 десятитисячних і в остачі 6. Ці 6 десятитисячних дають 60 стотисячних, а після ділення на 12 маємо 5 стотисячних без остачі. Отже вся частка рівна 0,00075.

В другому прикладі ділимо 56 десятих на 14 і маємо в частці рівно 4 десятих. Далі в ділeнику сотих немає, тому їх не буде й в частці—пишемо 0 сотих; тисячних маємо в ділeнику 7, тому при діленні їх на 14 матимем у частці також 0 тисячних.

Далі перетворюємо ці 7 тисячних на десятитисячні й ділимо 70 десятитисячних на 14; дістаємо 5 десятитисячних без остачі. Отже вся частка є 0,4005.

В такий же спосіб робимо обчислення й при діленні цілого числа на ціле, як що бажаємо виразити їхню частку десятковим дробом.

Нехай треба, напр., поділити 29 на 4.

$$
\begin{array}{l}
29 : 4 = 7{,}25 \\
\underline{10} \\
\underline{20} \\
0
\end{array}
$$

Цілих маємо в частці 7 і ще 1 в остачі; перетворюємо 1 цілу на десяті долі й маємо 10 десятих. Ці 10 десятих ділимо на 4 й маємо в частці 2 десятих й в остачі теж 2 десятих; їх роздроблюємо на соті долі—буде 20 сотих. Ці 20 сотих ділимо на 4 й маємо в частці 5 сотих без остачі. Отже частка є 7,25.

Поділімо ще 17 на 250. Очевидно, цілих у частці немає; перетворюємо 17 цілих на десяті й маємо 170 десятих. Десятих у

$$
\begin{array}{l}
17 : 250 = 0{,}068 \\
\underline{17\ 00} \\
\underline{2\ 000} \\
0
\end{array}
$$

частці теж не буде; пишемо 0 на місці десятих і перетворюємо наші 170 десятих на соті долі. Це буде 1700 сотих; ділимо їх на 250 і маємо в частці 6 сотих і в остачі 200 сотих. Остачу перетворюємо на тисячні й ділимо 2000 тисячних на 250; одержуємо 8 тисячних без остачі. Таким чином дістаємо частку 0,068.

Ті міркування, на підставі яких ми переводили обчислення в розглянутих прикладах, придатні, розуміється, до всіх випадків ділення десяткового числа на ціле. Але, як зараз побачимо, не завжди ми можемо знайти ту десяткову частку, яку шукаємо.

Нехай, напр., треба поділити 0,2 на 6.

$$\begin{array}{l} 0{,}2 : 6 = 0{,}0333\ldots \\ \quad 20 \\ \quad\;\; 20 \\ \quad\quad 20 \\ \quad\quad\;\; 2\ldots\ldots \end{array}$$

В частці не буде ні цілих, ані десятих; перетворюємо 2 десятих на соті й ділимо одержані 20 сотих на 6; в частці маємо 3 сотих, а в остачі 2 сотих. Ці 2 сотих перетворюємо на тисячні — маємо 20 тисячних; ділимо їх на 6 і знаходимо в частці 3 тисячних і в остачі 2 тисячних. Остачу перетворюємо на десятитисячні долі— буде 20 десятитисячних; ділимо їх на 6 і маємо в частці 3 і в остачі 2 десятитисячних. Звичайно, ми можемо продовжувати ділення й далі, перетворюючи остачу на стотисячні долі, потім на мілійонові й т. д., але ясно, що це ділення не скінчиться ніколи, бо при кожній новій цифрі частки ми одержуватимем ту саму остачу 2.

Крапки, які поставлено при частці (після десятитисячних доль) і при остачі, означають, що ділення не скінчиться, і десяткової частки не може бути. Як знаходити в таких випадках частку в вигляді звичайного дробу—про це буде сказано далі (в відділі IV).

Нехай ще треба поділити 8 на 11. Цілих у частці немає; роздроблюємо 8 на десяті й ділимо одержані 80 десятих на 11;

$$\begin{array}{l} 8 : 11 = 0{,}7272\ldots\ldots \\ \quad 80 \\ \quad\;\; 30 \\ \quad\quad 80 \\ \quad\quad\;\; 30 \\ \quad\quad\quad 8\ldots\ldots \end{array}$$

маємо в частці 7 десятих і в остачі 3. Ці 3 десятих перетворюємо на соті—буде 30 сотих; ділимо 30 сотих на 11 і маємо в частці 2 сотих і в остачі 8. Цю остачу перетворюємо на тисячні долі й маємо 80 тисячних, а після ділення їх на 11 одержуємо в частці 7 і в остачі 3 тисячних. Ці 3 тисячних все їдно, що 30 десятитисячних; ділимо їх на 11 і маємо в частці 2 десятитисячних, а в остачі знову 8. Ясно, що ділення не скінчиться ніколи, бо й далі ми одержуватимем по черзі ті самі остачі 8 і 3.

Проте ми можемо, коли схочемо, знаходити в подібних випадках **наближену** десяткову частку. Так, коли б ми в першому прикладі припинили ділення на сотих долях, то мали б у частці

$$\begin{array}{l} 0{,}2 : 6 = 0{,}03 \\ \quad 20 \\ \quad\; 2 \end{array}$$

0,03 і в остачі 2 сотих; ця частка 0,03, очевидно, менша за справжню, але відріжняється від неї менш, як на одну соту долю (бо остача 2 сотих при діленні на 6 дасть менше за одну соту). Ясно, що коли ми замісць точної частки візьмемо знайдене число 0,03, то помилка, яку ми робимо при цьому, буде менша за 1 соту; тому число 0,03 зветься **наближеною часткою з точністю до 1 сотої долі**. Ми записуємо це так:

$$0{,}2 : 6 = 0{,}03 \text{ (з точн. до } 0{,}01).$$

Як що ми припинимо ділення на тисячних долях, то матимем у частці 0,033 і в остачі 2 тисячних. Ясно, що ця частка менша

$$\begin{array}{l} 0{,}2 : 6 = 0{,}033 \\ \quad 20 \\ \quad\; 20 \\ \quad\;\; 2 \end{array}$$

за справжню, але відріжняється від неї менше, ніж на одну тисячну; вона зветься **наближеною часткою з точністю до 1 тисячної долі**, цеб-то

$$0{,}2 : 6 = 0{,}033 \text{ (з точн. до } 0{,}001\text{), і т. ин.}$$

В другому прикладі ми можемо таким же чином знайти, що

$$\begin{aligned} 8 : 11 &= 0{,}7 \text{ (з точн. до } 0{,}1) \\ 8 : 11 &= 0{,}72 \text{ (з точн. до } 0{,}01) \\ 8 : 11 &= 0{,}727 \text{ (з точн. до } 0{,}001) \\ 8 : 11 &= 0{,}7272 \text{ (з точн. до } 0{,}0001), \end{aligned}$$

і т. ин.

Ми обчисляли тут скрізь наближену частку з **недостачою**, тоб-то меншу за справжню. Але иноді для більшої точности краще буває взяти наближену величину з **перевишкою**; напр., обчисляючи частку 8 : 11 з точністю до 0,01, бачимо, що точніше взяти 0,73, ніж 0,72, бо лишок, який ми відкидаємо в останньому випадку, більший за половину сотої долі, і тому справжня частка ближча до 0,73.

Коли буває потрібним знаходити наближений вислід і як переводити обчислення з наближеними числами,—про це докладніше буде сказано далі.

§ 21. Ділення десяткового або цілого числа на десятковий дріб (по вміщенню).

Нехай треба поділити 0,72 на 0,12; це значить знайти, скільки разів у 72 сотих містяться 12 сотих, а для цього досить поділити 72 на 12; матимем 6. Отже

$$0{,}72 : 0{,}12 = 72 : 12 = 6$$

Нехай треба поділити ще 5,508 на 0,018. Це значить знайти, скільки разів у 5508 тисячних містяться 18 тисячних, а для цього досить поділити 5508 на 18. Отже маємо

$$5{,}508 : 0{,}018 = 5508 : 18 = 306$$

В цих прикладах нам доводилося ділити десяткові дроби з однаковими знаменниками; ми бачимо, що для цього досить поділити їхніх чисельників, або инакше кажучи, поділити дані числа, не звертаючи уваги на протинки, наче-б-то вони були цілими числами.

Розуміється, частка при цьому не завжди може бути цілою, але ми обмежуємося поки що простішими випадками, коли ділитель міститься в діленикові ціле число разів.

Нехай тепер нам треба поділити 0,7 на 0,05. Це значить знайти, скільки разів у 7 десятих містяться 5 сотих, а для цього ми повинні спершу перетворити обидва дроби на однакові долі—на соті. Очевидно, 7 десятих все їдно, що 70 сотих; тому нам доведеться поділити 70 сотих на 5 сотих, або замісць цього 70 на 5; матимем 14. Отже

$$0{,}7 : 0{,}05 = 0{,}70 : 0{,}05 = 70 : 5 = 14$$

Таким же чином, коли нам треба поділити 2,4 на 0,006, ми переводимо спочатку дані дроби в однакові долі—тисячні, а далі ділимо, як і досі:

$$2{,}4 : 0{,}006 = 2{,}400 : 0{,}006 = 2400 : 6 = 400$$

І взагалі, коли нам дано для ділення десяткові дроби з ріжними знаменниками, то ми спочатку повинні звести їх до спільного знаменника, а потім додержуємося попереднього правила—відкидаємо протинки й ділимо цілі числа, які після цього залишаються (тоб-то чисельників цих дробів).

Правило це можна поширити й на той випадок, коли діленик буде цілим числом. Нехай, напр., нам треба поділити 8 на 0,16; це значить знайти, скільки разів у 8 цілих містяться 16 сотих; а для цього доведеться перш за все перетворити 8 цілих на соті долі—матимем 800 сотих. Тепер ми повинні поділити 800 сотих на 16 сотих, або замісць цього 800 на 16; матимем 50. Отже

$$8 : 0{,}16 = 8{,}00 : 0{,}16 = 800 : 16 = 50$$

В такий же спосіб ми могли б знайти, що

$$6 : 0{,}125 = 6{,}000 : 0{,}125 = 6000 : 125 = 48,$$
$$1 : 0{,}0005 = 1{,}0000 : 0{,}0005 = 10000 : 5 = 2000,$$

і т. ин.

Завважмо, що й тут ми розглядали тільки простіші випадки, коли частка є ціле число. Инші випадки ми розглядатимем далі (в відділі IV).

---

§ 23. Перетворення десяткового дробу на звичайний, або навпаки.

Всякий десятковий дріб ми можемо в разі потреби перетворити на звичайний, тоб-то записати не з протинкою на зразок цілого числа, а за допомогою риси й підписаного під нею знаменника; напр.

$$0{,}7 = \frac{7}{10},$$
$$2{,}33 = \frac{233}{100} = 2\,\frac{33}{100}$$

Дріб, який ми при цьому одержуємо, можна иноді й скоротити; напр.:

$$0{,}25 = \frac{25}{100} \overset{25}{=} \frac{1}{4},$$
$$0{,}625 = \frac{625}{1000} \overset{25}{=} \frac{25}{40} \overset{5}{=} \frac{5}{8}.$$

З приводу цього виникає питання, чи не можна й навпаки всякий звичайний дріб перетворяти на десятковий. Це в багатьох випадках давало б нам можливість упрощувати обчислення, бо дії з десятковими дробами, як ми бачили, простіші, ніж зо звичайними. Ми зараз покажемо, як робиться таке перетворення.

Нехай ми хочемо перетворити на десятковий дріб $\frac{7}{40}$. Ми знаємо, що всякий дріб можна вважати за частку від ділення його чисельника на знаменника; таким чином даний дріб $\frac{7}{40}$ можна вважати за частку від ділення 7 на 40; а таку частку ми вже вміємо виражати в десяткових долях. Отже маємо:

$$\frac{7}{40} = 7 : 40 = 0{,}175$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ \hline 300 \\ \hline 200 \\ \hline 0 \end{array}$$

Таким же чином ми можемо знайти, що

$$\frac{53}{80} = 53 : 80 = 0{,}6625; \quad \frac{1}{625} = 1 : 625 = 0{,}0016$$

530	1000
500	3750
200	0
400	
0	

Але ми вже знаємо з попереднього, що бувають випадки, коли таке ділення не скінчується, і тому ясно, що не всякий звичайний дріб можна перетворити на десятковий. В випадку безкрайнього ділення ми можемо, як бачили й раніше, знайти *наближену* величину даного дробу з тою точністю, з якою схочемо

Напр. $\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8333\ldots\ldots$; звідси маємо:

50	$\frac{5}{6} = 0{,}83$ (з точн. до 0,1)
20	„ $= 0{,}833$ (з точн. до 0,01)
20	„ $= 0{,}8333$ (з точн. до 0,001)
20	і т. ин.
2	

В яких саме випадках ділення закінчиться й в яких ні—про це буде розмова далі (відд. III).

---

§ 24. Поняття про відсоток. Обчислення відсоткового відношення двох чисел.

Розгляньмо таку задачу:

На одно печево хліба взяли 34 фунти борошна й мали 12 фунтів припеку; а на друге взяли 50 фунтів борошна й дістали 16 фунтів припеку. Яке борошно дало порівнюючи більший припік?

Щоб розвязати це питання, знайдемо спочатку, яку частину всього взятого борошна складає припік у першому й у другому випадку. За першим разом було 12 фунтів припеку на 34 фунти борошна—це складає $\frac{12}{34}$ кількости всього борошна; за другим же разом було 16 фунтів припеку на 50 фунтів борошна, тоб-то припік складає $\frac{16}{50}$ узятого борошна. Щоб знайти, яке борошно дало кращий припік, треба порівняти два дроби: $\frac{12}{34}$ і $\frac{16}{50}$, і знайти, який з них більший. Для цього слід було б спочатку звести їх до спільного знаменника; але це обчислення досить складне, і ми зробимо простіше так: перетворімо обидва дроби на десяткові й знайдемо, скільки сотих доль від кількости борошна складає в кожному печеві припік:

$$\frac{12}{34} = 12 : 34 = 0{,}352\ldots\ldots; \quad \frac{16}{50} = 16 : 50 = 0{,}32$$

```
12 : 34 = 0,352 . . . . .          16 : 50 = 0,32
120                                160
 180                                100
  100                                 0
   32 . . . . .
```

Ми бачимо, що в першому випадку припік складає 35 сотих (з лишком) од кількости всього взятого борошна, а в другому—32 сотих. Отже ясно, що перше борошно дало порівнюючи більший припік.

Розгляньмо ще подібну задачу:

В одному місті було 65587 мешканців, а в другому в той же самий час 42650; через кілька років населення першого міста збільшилося на 9213 душ, а другого—на 7677. В якому місті за цей час був більший приріст населення?

І тут ми повинні спочатку знайти, яку частину всього населення складає приріст у першому місті й яку—в другому, а потім порівняти одержані дроби. В першому місті приріст був 9213 душ на 65587—це складає $\frac{9213}{65587}$ усього попереднього населення; а в другому приріст був 7677 душ на 42650, тоб-то $\frac{7677}{42650}$ усього населення. Щоб порівняти ці дроби, довелося б звести їх до спільного знаменника; але це, очевидно, дуже трудно, і значно лекше буде, як і в попередній задачі, перетворити обидва дроби на десяткові й знайти, скільки сотих доль від усього населення складає приріст для кожного міста:

```
 9213 : 65587 = 0,1404 . . . . . ;     7677 : 42650 = 0,18
 92130                                  76770
— 65587                               — 42650
 265430                                 341200
— 262348                              — 341200
   308200 . . . . .                          0
```

Бачимо, що в першому випадку приріст складає 14 сотих (з лишком) від усього населення, а в другому—18 сотих; таким чином у другому місті був порівнюючи більший приріст.

Завважмо, що *соту долю числа* инакше звуть відсотком (або *процентом*), і таким чином ми могли-б сказати, що в першому місті приріст населення складає 14 відсотків (приблизно), а в другому—18 відсотків. Слово „відсоток" означається скорочено знаком %; отже замісць запису:

18 відсотків

ми можемо написати коротше:

18%

Подібні розрахунки доводиться робити як у щоденному житті, так і в природничих науках дуже часто; як що при цьому ми не одержуємо точного числа відсотків, то беремо наближене число, з недостачою або перевишкою, в залежности від того, яке з них точніше.

Напр., як що в класі всього 43 учні, і з них переведено до наступного класу 37, то успішність класу обчисляється так: знаходимо, яку частину всього класу складає число переведених ($\frac{37}{43}$) і обчисляємо, скільки в цьому дробові відсотків, тоб-то $\frac{37}{43} = 37 : 43 = 0,86 \ldots\ldots$; успішність класу рівна 86%.

370
260
2 . . . . .

Як що в шпиталю було 203 хворих на висипний тиф, і з них умерло 47, то смертність од висипного тифу обчисляється так: знаходимо, яку частину всієї кількости хворих складають померші ($\frac{47}{203}$), і обчисляємо, скільки тут буде відсотків:

$\frac{47}{203} = 47 : 203 = 0,23 \ldots\ldots$; смертність рівна 23%.

470
640
31 . . . . .

Коли, напр., в 150 ґрамах соляного розчину є 28 ґрамів чистої соли, то гущина розчину обчисляється так: знаходимо, яку частину кількости всього розчину складає чиста сіль ($\frac{28}{150}$) і перетворюємо цей дріб на відсотки:

$\frac{28}{150} = 28 : 150 = 0,186 \ldots\ldots$;

280
1300
100
100 . . . . .

гущина розчину рівна 19% (приблизно; тут узято наближене число з перевишкою, бо вислід ближче до 19 сотих, ніж до 18).

Коли напр. кооператив купив краму на 60 мілійонів карб., а після продажу цього краму придбав окрім витрачених грошей ще

9 мілійонів, то прибуток на капитал обчисляється так: ми знаходимо, якій частині витрачених грошей рівняється прибуток ($\frac{9}{60}$) і перетворюємо цей дріб на відсотки:

$$\frac{9}{60} = 9 : 60 = 0{,}15;$$

$$\begin{array}{l} \underline{\ \ \ \ } \\ 90 \\ \underline{\ \ \ \ } \\ 300 \\ \underline{\ \ \ \ } \\ 0 \end{array}$$

прибуток рівняється 15% витраченого капиталу.

Иноді переводять подібні розрахунки не в сотих, а тисячних долях (тисячні долі при цьому звуться инакше проміллями). Так, напр., у тисячних долях обчисляють пробу дорогоцінних металів; коли сказано, що золото 825-ої проби, то це значить, що в сплаві чисте золото складає 825 тисячних доль усього метала (по вазі). Тисячні долі, або проміллі, означаються скорочено знаком ‰; отже 825 тисячних (або проміль) ми запишемо так: 825‰.

Ми розвязували допіру цілу низку питань, в яких треба було знайти, скільки відсотків складає одно число від другого. Покажімо тепер, як можна це обчисляти коротше.

Нехай нам дана така задача:

В школі було 75 душ учнів; за рік покинуло школу 6 душ. Скільки відсотків од усього числа учнів складають ті, що покинули школу?

Знайдімо спочатку, яку частину складає 6 од 75; це буде $\frac{6}{75}$. Тепер ми повинні знайти, скільком відсоткам (або сотим долям) рівна ця частина; для цього можемо розміркувати так: 1 ціла одиниця—все їдно, що 100 сотих, або 100 відсотків; тому $\frac{1}{75}$ доля повинна вміщати не 100 відсотків, а в 75 разів менше, або $\frac{100}{75}$ відсотка; а $\frac{6}{75}$—в 6 разів більш од цього числа, тоб-то $\frac{600}{75}$, або 8 відсотків. Можемо записати це рядками так:

$$1 = 100\%$$

$$\frac{1}{75} = \frac{100}{75}\%$$

$$\frac{6}{75} = \frac{600}{75}\% = 8\%.$$

Таким чином ми знайшли, що зменшення кількости учнів рівняється 8% од усього їх числа.

Знайдімо ще, напр., скільки відсотків складають 13 од 40. Ясно, що 13 од 40 складає $\frac{13}{40}$; тепер перетворімо цей дріб на відсотки, як і в попередній задачі:

$$1 = 100\%$$

$$\frac{1}{40} = \frac{100}{40}\%$$

$$\frac{13}{40} = \frac{1300}{40}\% = 32\frac{1}{2}\%$$

Ми спостерігаємо тут, що число відсотків, які містяться в данному дробові, в 100 разів більше від цього дробу; тому весь хід обчислення можемо висловити так: щоб знайти, скільки відсотків складає одно число від другого, ми ділимо перше число на друге (цеб-то знаходимо, яку частину складає перше число від другого) й одержаний дріб множимо на 100; або инакше—перше з даних чисел множимо на 100 й добуток ділимо на друге число.

Так напр.:

3 від 4 складають $\frac{3}{4}$, або $\frac{300}{4}$ %, тоб-то 75%

12 од 30 складають $\frac{12}{30}$, або $\frac{1200}{30}$ %, тоб-то 40%

1 од 9 складають $\frac{1}{9}$, або $\frac{100}{9}$ %, тоб-то $11\frac{1}{9}$ %, і т. ин.

Завважмо, що розвязування питання про те, скільки відсотків складає одно число від другого, зводиться таким чином до обчислення того, яку частину складає перше число від другого, тобто до обчислення відношення двох чисел. Тому замісць запитання, скільки відсотків складає одно число від другого, кажуть инакше—знайти відсоткове відношення даних чисел; напр., як що дані числа 3 й 4, то відношення їх є $\frac{3}{4}$, відсоткове відношення—75%.

Для дальших обчислень корисним буде знати, скільком відсоткам відповідають найбільш вживані дроби (і навпаки), а саме:

$$1 = 100\%$$

$$\frac{1}{2} = 100\% : 2 = 50\%$$

$$\frac{1}{4} = 100\% : 4 = 25\%$$

$$\frac{1}{8} = 100\% : 8 = 12\frac{1}{2}\%$$

$$\frac{1}{3} = 100\% : 3 = 33\frac{1}{3}\%$$

$$\frac{1}{6} = 100\% : 6 = 16\frac{2}{3}\%$$

$$\frac{1}{5} = 100\% : 5 = 20\%$$

$$\frac{1}{10} = 100\% : 10 = 10\%$$

$$\frac{1}{20} = 100\% : 20 = 5\%,$$ і т. ин.

§ 25. Найпростіші відсоткові обчислення.

1) Обчислення кількох відсотків од даного числа

Візьмімо таку задачу:

Службовець має одержати по тарифу 600 тис. карб. утримання; в рахунок цього йому видається грішми 18%, а решта—продуктами. Скільки він одержить грішми?

Міркуємо так: 18 відсотків—це все їдно, що 18 сотих; отже ми повинні обчислити 18 сотих од 600 тис. карб. Для цього треба спочатку знайти від даного числа 1 соту (1%), тоб-то поділити 600 тис. на 100—матимем 6 тис.; а це число треба, очевидно, помножити на 18, і знайдемо 108 тис. Все обчислення можна записати рядками так:

Вся ставка (100%) = 600 тис.
1% її = 600 тис. : 100 = 6 тис.
18% „ = 6 тис. $\times$ 18 = 108 тис.

Розгляньмо ще таку задачу:

Артіль робітників узяла в посесію садок, з умовою, що за свою працю вона має одержати 55% урожаю. Всього зібрано в садку 240 пуд. яблук; скільки пудів із цього числа дістанеться артілі?

Як і раніш, обчисляємо від даного числа (240 пуд.) спочатку 1 соту, а потім 55 сотих, і записуємо це так:

Увесь збір (100%) = 240 пуд.
1% його = 240 пуд. : 100 = 2,4 п.
55% „ = 2,4 пуд. $\times$ 55 = 132 п.

Очевидно, подібні задачі можна розвязувати шляхом зведення до одиниці, як і взагалі задачі, де треба знайти якунебудь частину від даного числа.

При цьому можливі иноді спрощення. Нехай, напр., ми повинні знайти 25% од 344. По загальному способу треба було б спочатку поділити 344 на 100 (знайти 1% од даного числа), а вислід помножити ще на 25; але ми можемо взяти на увагу, що 25%—це $\frac{25}{100}$, або $\frac{1}{4}$; отже досить знайти $\frac{1}{4}$ од даного числа:

$$25\% \text{ од } 344 = \frac{1}{4} \text{ од } 344 = 344 : 4 = 86$$

Знайдімо ще $12\frac{1}{2}\%$ од 560. Замісць загального способу ми можемо обчислити це скороченим шляхом так:

Все дане число $(100\%) = 560$

$$10\% \text{ його} = 560 : 10 = 56$$

$$2\frac{1}{2}\% \text{ „} = 56 : 4 = 14$$

$$12\frac{1}{2}\% \text{ „} = 56 + 14 = 70,$$

або так: $12\frac{1}{2}$ відсотків є, очевидно, половина 25 відсотків, або половина чверті даного числа; але половина чверті є восьма доля; отже досить знайти просто $\frac{1}{8}$ від даного числа:

$$12\frac{1}{2}\% \text{ од } 560 = \frac{1}{8} \text{ од } 560 = 560 : 8 = 70$$

В такий же спосіб можна розвязувати й обернене питання, а саме:

2) Обчислення числа по його даних кількох відсотках.

Ось, напр., задача:

На цукроварні працюють 540 робітників; це складає 60% повної їх кількости. Знайти повну кількість робітників цієї цукроварні.

І тут ми знайдемо спочатку 1% повної кількости—для цього доведеться поділити 540 на 60; матимем 9. Повна ж кількість—це 100% (100 сотих); отже ми повинні помножити 9 на 100, і маємо 900.

Все розвязання задачі можна записати рядками так:

60% повної кількости	=	540 робітн.
1% „ „	=	540 : 60, або 9 роб.
100% „ „	=	9×100, або 900 роб.

Ось ще подібне завдання:

Село внесло 255 пуд. жита в рахунок продподатку; це складає 15% всього податку. Чому рівен увесь податок, який має внести це село?

Як і в попередній задачі, обчисляємо так:

15% продподатку	=	255 пуд.
1% „	=	255 п. : 15 = 17 пуд.
100% „	=	17 п. $\times$ 100 = 1700 пуд.

І в цих задачах можливі спрощення в обчисленнях. Напр., нехай нам дано, що 20% якогось числа рівні 36, і треба знайти все це число; міркуємо так: 20%—це все їдно, що $\frac{20}{100}$, або ^{1}; а коли $\frac{1}{5}$ нашого числа є 36, то все число буде в 5 разів більше, тоб-то 36×5, або 180.

Ось ще запитання: знайти число, коли $2\frac{1}{2}\%$ його рівні 22. Тут можна зміркувати так: як що $2\frac{1}{2}\%$ невідомого числа рівні 22, то 5% його повинні бути в 2 рази більш од цього, тоб-то 22.2, або 44; а всі 100%—ще в 20 разів більше, тоб-то 44.20, або 880. Записуємо це так:

$2\frac{1}{2}\%$	невідом.	числа	$= 22$
5%	„	„	$= 22.\ 2 = 44$
100%	„	„	$= 44.20 = 880.$

Отже число, яке ми шукаємо, є 880.

Відділ III.

Найпростіші відомості про подільність чисел та прикладання їх до перетворення дробів.

§ 26. Випадки, в яких нам необхідно знати, чи поділиться одно з даних чисел на друге, чи ні. Поняття про ознаки подільности.

Нехай нам треба скоротити дріб $\frac{425}{600}$; для цього, як ми знаємо, треба підшукати таке число, на яке й чисельник і знаменник дробу поділилися б без остачі. Ми звертаємо увагу на те, що знаменник (600) містить 6 повних сотень, а число 6 ділиться, очевидно, на 2 й на 3; кожна ж сотня ділиться на 4 й на 25. Ми й повинні тепер спробувати, чи не поділиться чисельник на одно з цих чисел; можна пересвідчитися в тому, що він повинен поділитися на 25, бо кожна сотня ділиться на 25, а крім 4 повних сотень у чисельнику є ще як раз 25 одиниць. Тепер бачимо, що наш дріб можна скоротити на 25; обчисляємо це так: в одній сотні 25 міститься 4 рази, в 4 сотнях—16 разів, та крім цього в чисельнику є ще 25 одиниць, тому в усьому чисельнику число 25 міститься 17 разів; у знаменнику ж є 6 повних сотень, значить у них 25 повиннно міститися 4.6, або 24 рази. Таким чином маємо

$$\frac{425}{600} \overset{25}{\smile}\!\!= \frac{17}{24}$$

Ось ще питання: нехай нам треба дізнатися, чи буде 1922-й рік високосним. Для цього, як ми знаємо, досить поділити його число (1922) на 4; як що ділення буде без остачі, то рік є високосний; коли ж ні, то звичайний. Тут нам навіть не треба знати, скільки ми маємо одержати в частці; нам досить тільки знати, чи поділиться дане число на 4, чи ні. Це можна зміркувати так: в даному числі є 19 повних сотень та крім цього ще 22 одиниці; кожна сотня ділиться на 4, тому й 19 сотень поділяться; але 22 не ділиться на 4, значить і все число 1922 на 4 не поділиться;—отже біжучий рік є звичайний.

Таким чином при скороченні дробів, та й при розвязуванні инших питань нам необхідно буває знати, чи поділиться одно з даних чисел на друге без остачі, чи ні. Иноді це важко передбачити наперед, і доводиться пробувати ділити на щастя, але почасту, як і в згаданих прикладах, можна зміркувати, чи поділиться дане число, навіть і не переводячи цілком усього ділення. Ми побачимо далі, що є особливі ознаки, на підставі яких можна передбачати, чи поділиться одно дане число на друге без остачі, чи ні; ці ознаки звуться ознаками подільности чисел.

---

§ 27. Ознаки подільности на 10, 2 та 5.

Візьмімо два числа: 270 та 273; ясно, що перше з них поділиться на 10 без остачі, бо воно складено тільки з самих десятків, друге ж на 10 не поділиться, бо містить, крім повних 27 десятків, ще 3 одиниці. І взагалі, число поділиться на 10, коли в складі його немає звичайних одиниць (тоб-то коли його остання цифра—нуль).

Спробуймо тепер поділити ті ж самі числа на 2. З огляду на те, що 10 ділиться на 2, то й усі повні десятки числа, скільки б їх не було, поділяться на 2, і таким чином число 270 поділиться на 2; в числі ж 273 десятки (27 десятків) поділяться на 2, а 3 одиниці не поділяться, і через те й усе число також не поділиться на 2. Коли ж ми візьмемо, напр., число 278, то в ньому поділяться на 2 не тільки десятки, але й одиниці (8 ділиться на 2), і через те й усе число поділиться на 2.

Очевидно, число поділиться на 2, коли його звичайні одиниці діляться на 2, або коли їх зовсім нема (тоб-то коли його остання цифра означає число, яке ділиться на 2, або нуль).

Завважмо, що числа, які діляться на 2, звуться инакше паристими, а числа, що не діляться на 2—непаристими; отже напр., числа 270 і 278—паристі, а число 273—непаристе.

Візьмімо знову числа 270 і 273 й подивімося, чи ділитимуться вони на 5. З огляду на те, що 10 ділиться на 5, то всі повні десятки числа, скільки б їх не було, поділяться на 5, і тому число 270 повинно ділитися на 5; в числі ж 273 десятки поділяться на 5, але 3 одиниці не поділяться, і тому й усе число не поділиться на 5. Коли ж ми візьмемо число 275, то в ньому ділитимуться на 5 не тільки десятки, але й одиниці, і таким чином і все число поділиться на 5.

Звідсіля ясно, що число ділитиметься на 5, коли його звичайні одиниці діляться на 5, або коли їх зовсім нема (тоб-то коли його останньою цифрою є 5, або 0).

---

§ 28. Ознаки подільности на 100, 4 та 25.

Візьмімо числа 3400 й 3468; очевидно, перше з них поділиться на 100 без остачі, бо воно складено тільки з самих сотень; друге ж не поділиться, бо містить, крім 34 повних сотень, ще 68 одиниць. І взагалі, число поділиться на 100, коли в його складі немає десятків і одиниць (тоб-то коли його останні дві цифри—нулі).

Будемо тепер ділити ті ж числа на 4. З огляду на те, що 100 ділиться на 4, то й усі повні сотні числа, скільки б їх не було, поділяться на 4, і таким чином число 3400 поділиться на 4; число ж 3468 містить 34 сотні, які в усякому разі поділяться на 4, та ще 68 одиниць, які теж діляться на 4; тому й усе число 3468 поділиться на 4. Коли ж ми мали б, напр., число 3475, то його сотні поділяться на 4, але ж десятки з одиницями (75) не поділяться, і через те й усе число 3475 не поділиться на 4.

Отже, число поділиться на 4, коли його десятки з одиницями поділяться на 4, або коли їх зовсім нема (тоб-то коли останні дві цифри числа означають число, яке ділиться на 4, або будуть нулями).

Таким же чином знайдемо й ознаку подільности на 25. З огляду на те, що 100 ділиться на 25, то всі повні сотні числа скільки б їх не було, поділяться на 25, і тому напр., число 3400 поділиться на 25; число 3475 також поділиться, бо воно крім повних сотень (34) містить ще 75 одиниць, а 75 ділиться на 25; число ж 3468 крім повних сотень містить ще 68 одиниць, а це число на 25 не ділиться, і тому 3468 не поділиться на 25.

Очевидно, число поділиться на 25, коли його десятки з одиницями діляться на 25, або коли їх зовсім нема (тоб-то коли його дві останні цифри будуть 25, 50, 75 або 100).

Міркуючи в такий самий спосіб, ми можемо знайти ознаки подільности й на инші числа, схожі на попередні, напр., 1000, 8 або 125. Очевидно, тут нам доведеться звертати увагу на останні три десяткові порядки того числа, яке ми маємо ділити (сотні, десятки та одиниці); коли одиниць цих порядків зовсім нема, або вони поділяться (на 8 або 125), то й усе число поділиться на згадані числа, і т. ин.

§ 29. Ознаки подільности на 9 та на 3.

Візьмімо число 4257 та зміркуймо, чи поділиться воно на 9. Для цього пошукаймо спершу, чи немає такого десяткового порядку, який завжди ділився б на 9. Для цього будемо ділити на 9 по черзі одиниці ріжних десяткових порядків, тоб-то числа 10, 100, 1000 і т. д.; знайдемо

$$
\begin{aligned}
10 : 9 &= 1 \text{ (ост. 1)}\\
100 : 9 &= 11 \text{ (ост. 1)}\\
1000 : 9 &= 111 \text{ (ост. 1)}\\
10000 : 9 &= 1111 \text{ (ост. 1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ми бачимо, що жодна десяткова одиниця не ділиться на 9, і після ділення кожної з них в остачі залишается 1; так воно буде й далі, бо при переході до одиниці наступного вищого порядку діленик збільшуеться кожного разу на 9 попередніх одиниць, а частка на 1 таку одиницю, остача ж 1 залишаеться без зміни.

Тепер будемо міркувати так. В нашому числі 4257 є 4 тисячі, 2 сотні, 5 десятків, та 7 одиниць; коли ми кожну тисячу зокрема ділитимем на 9, то кожного разу одержуватимем в остачі 1, а всього набереться таким чином 4 одиниці. Далі ми ділитимем на 9 зокрема кожну сотню; кожного разу матимем в остачі 1, а всього від ділення сотень залишаться неподіленими 2 одиниці. Потім ми ділитимем на 9 зокрема кожен десяток; від ділення кожного десятка матимем в остачі 1, а всього від ділення десятків набереться неподілених 5 одиниць. Крім цього, в нашому числі є ще 7 звичайних одиниць; підрахуймо тепер, скільки всього в нас залишилося неподілених одиниць:

$$4 + 2 + 5 + 7 = 18.$$

Але 18 одиниць можна поділити на 9 без остачі; тому й усе наше число 4257 повинно ділитися на 9 без остачі. Дійсно, після ділення маємо $4257 : 9 = 473$.

Візьмімо тепер число 63286 і зробімо з ним подібний розрахунок. В нашому числі є 6 десятків тисяч, 3 тисячі, 2 сотні, 8 десятків та 6 одиниць; ми ділитимем на 9 зокрема кожен десяток тисяч, і одержуватимем кожного разу в остачі 1, а всього залишиться таким чином неподілених 6 одиниць. Далі ми ділитимем на 9 зокрема кожну тисячу; матимем в остачі кожного разу по 1, а всього від ділення тисяч залишаться неподіленими 3 одиниці. Потім ділитимем на 9 зокрема кожну сотню; матимем в остачі від кожної по 1, а всього від ділення сотень залишаться 2 неподілені одиниці. Таким же чином від ділення десятків залишаться непо-